Tema 4. Orígenes de la Física cuántica

Física II, Grados en Matemáticas y Estadística

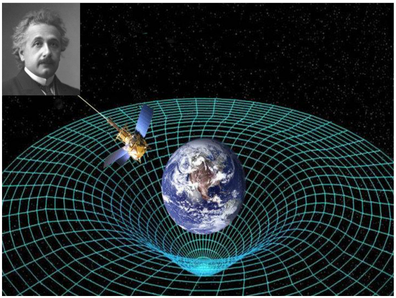
Contenido

Introducción

A finales del siglo XIX, la Física estaba dividida en varios cuerpos, que permitían ofrecer una explicación científica a (casi) todos los fenómenos observados:

1. La Mecánica, complementada en el siglo XIX por los trabajos de Hamilton, entre otros.
2. La Termodinámica y la Física estadística, sistematizadas por los trabajos de Gibbs, Boltzmann y otros.
3. El Electromagnetismo, que incluía los fenómenos ópticos después de la síntesis de Maxwell.

A principios del siglo XX, hubo dos hechos fundamentales que cuestionaron este edificio:



Los estudios sobre simultaneidad y movimiento relativo de ondas electromagnéticas condujeron al desarrollo de la teoría de la relatividad.

El comportamiento de los cuerpos negros llevó a la hipótesis de Planck, que permitió explicar además los efectos fotoelétrico y Compton. Estos hechos, entre otros, constituyen el origen de la Física cuántica.

Radiación

Se llama radiación a la transferencia de calor de un medio a otro mediante la emisión y absorción de ondas electromagnéticas.

Ley de Stefan-Boltzmann

La potencia emitida por un cuerpo a una temperatura T es proporcional a su área y a la cuarta potencia de su temperatura:

$$\boxed{P_r = e\sigma A T^4}$$

$\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$

Constante de Stefan-Boltzmann

$e \equiv$ Emisividad

Un cuerpo en un medio a temperatura T_0 absorbe parte de la radiación que incide sobre él. La radiación absorbida es

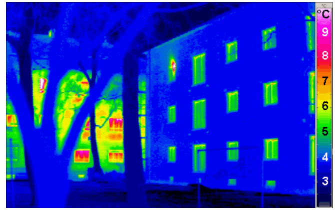
$$P_a = e\sigma A T_0^4,$$

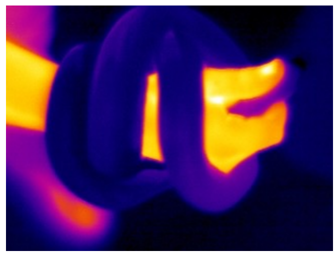
de manera que la potencia *neta* es

$$P_{neta} = P_r - P_a = e\sigma A\left(T^4 - T_0^4\right)$$

- Si $T > T_0$, el cuerpo emite más que absorbe, de manera que el medio se calienta y el cuerpo se enfría.
- Si $T < T_0$, el cuerpo absorbe más que emite, el medio se enfría y el cuerpo se calienta.
- Si $T = T_0$, el cuerpo está en equilibrio térmico con el medio.

Radiación

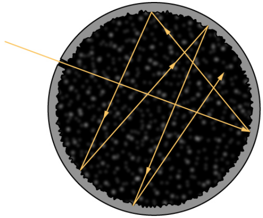




Radiación del cuerpo negro

Cuerpo negro

Se llama cuerpo negro a un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre él.

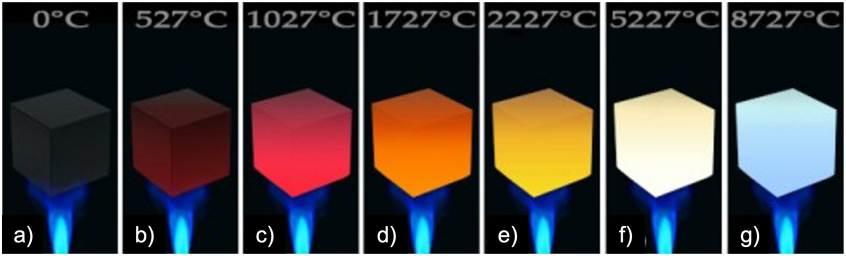


La figura muestra un modelo de cuerpo negro. La radiación tiene una baja probabilidad de salir de nuevo por el orificio, de manera que es prácticamente absorbida. Además, la (poca) radiación que sale del agujero es característica de la temperatura *dentro* del cuerpo negro.

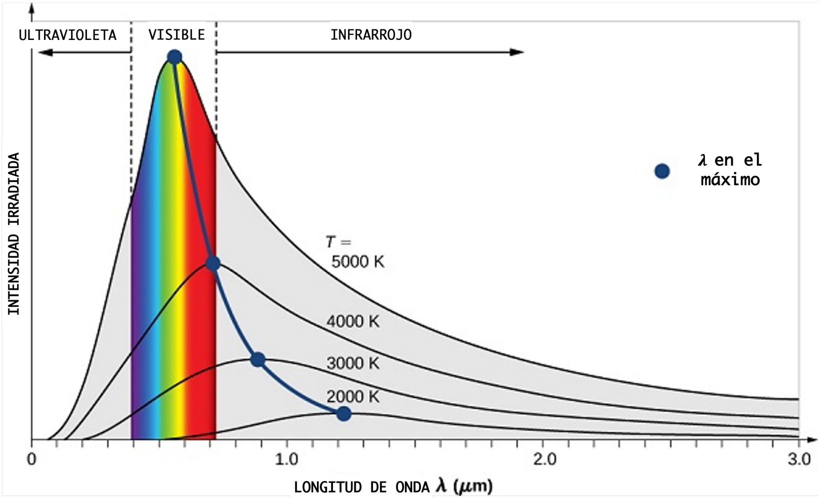
Ley del desplazamiento de Wien

La longitud de onda del máximo de radiación de un cuerpo negro depende de la temperatura:

$$\boxed{\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898\ \text{mm}\cdot\text{K}}{T}}$$



Radiación del cuerpo negro



Cuestión

La radiación emitida por la superficie del Sol presenta su máxima potencia a aproximadamente 500 nm de longitud. Suponiendo que el Sol se comporta como un cuerpo negro, determinar la temperatura de su superficie (Sol.: 5796 K).

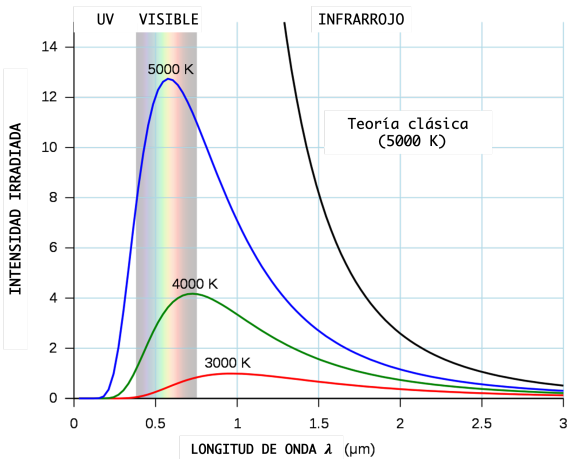
Catástrofe ultravioleta

La teoría electromagnética clásica no permite justificar las observaciones experimentales relativas a la radiación del cuerpo negro.

$$\boxed{B_\lambda(T) = \frac{2ck_BT}{\lambda^4}}$$

Ley de Rayleigh-Jeans

$$B_\lambda(T) \to \infty \quad \text{para } \lambda \to 0$$



Hipótesis cuántica de Planck

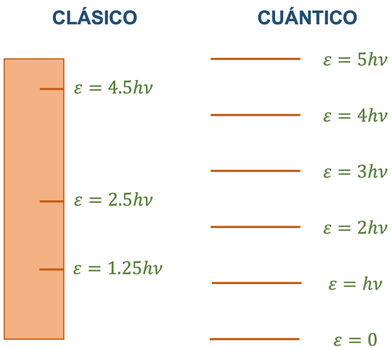
En 1900, Max Planck planteó la hipótesis cuántica para explicar los espectros de radiación del cuerpo negro.

Hipótesis cuántica

Cuando se irradian con una radiación de frecuencia ν, las paredes de un cuerpo negro solo absorben y emiten energías que sean múltiplos de un cuanto de energía, cuyo valor es

$$\boxed{\varepsilon = h\nu,}$$

donde $h = 6.626{\cdot}10^{-34}$ J·s $= 4.136{\cdot}10^{-15}$ eV·s es la constante de Planck.



Cuantización de la energía

Se dice que las energías emitidas o absorbidas por el cuerpo negro están cuantizadas.

La hipótesis de Planck evita la catástrofe ultravioleta.

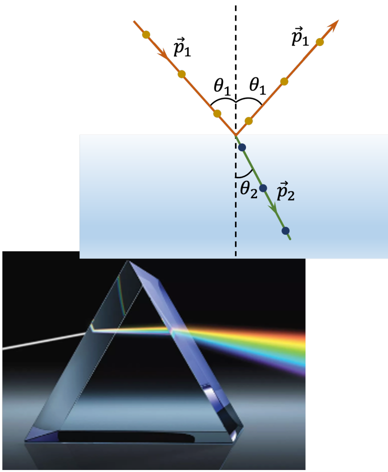
$$\boxed{B_\lambda(T) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5}\frac{h}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}}$$

Naturaleza de la luz

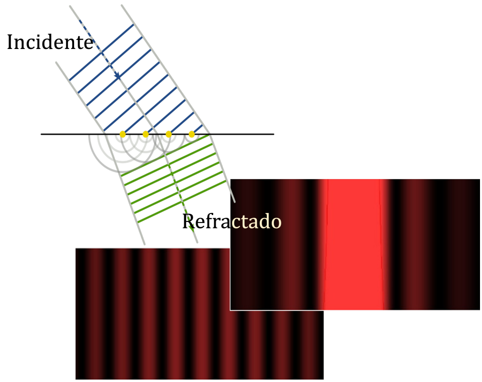
Tradicionalmente coexistieron dos teorías sobre la naturaleza de la luz.

- Según la interpretación corpuscular de Newton (y otros), la luz está compuesta por unas partículas llamadas corpúsculos. La existencia de estos corpúsculos explica la propagación en línea recta de la luz, la reflexión y la refracción y la descomposición de la luz blanca en colores en un prisma.
- La interpretación ondulatoria de Huygens (y otros), por el contrario, asume que la luz es una onda que se propaga por medios materiales y por el vacío.

CORPUSCULAR



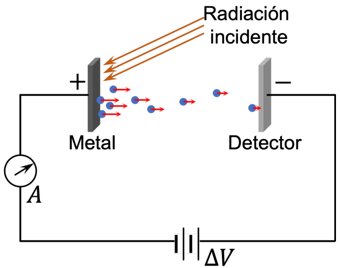
ONDULATORIA



El efecto fotoeléctrico

Efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por una superficie iluminada con radiación de una cierta frecuencia.



Cuando una radiación de frecuencia ν incide sobre una placa metálica arranca electrones. Sólo los que tengan $K \geq \Delta V$ llegan al detector y producen una corriente eléctrica.

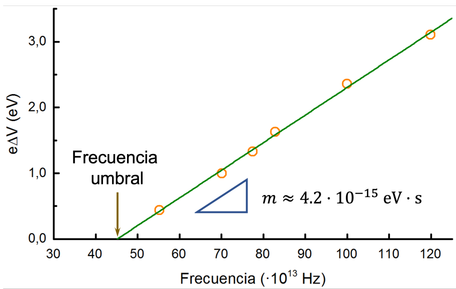
Potencial de frenado

Se llama potencial de frenado al mínimo valor de ΔV para el que no existe corriente.

El potencial de frenado es una medida de la energía cinética máxima de los electrones emitidos por efecto fotoeléctrico.

CARACTERÍSTICAS DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO

- El potencial de frenado no depende de la intensidad de la radiación incidente; solo depende de su frecuencia.
- Sólo hay efecto fotoeléctrico si la frecuencia ν es mayor que un cierto valor, llamado frecuencia umbral.

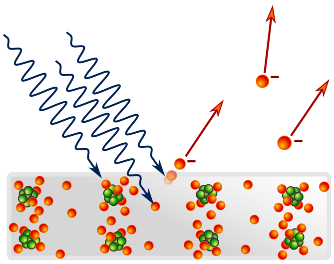


Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico

- La radiación electromagnética está formada por cuantos llamados fotones.
- La energía de un fotón es

$$\boxed{\varepsilon = h\nu,}$$

donde h es la constante de Planck.



- Cuando una radiación electromagnética incide sobre un metal, parte de su energía se transmite a los electrones. Si ϕ_0 es la mínima energía requerida para arrancar un electrón del metal, llamada función de trabajo, entonces

$$\boxed{K_{\text{máx}} = e\Delta V = h\nu - \phi_0}$$

- Al representar $e\Delta V$, se obtiene una línea recta cuya pendiente es h y que corta al eje de ordenadas para la frecuencia umbral:

$$\nu_0 = \frac{\phi_0}{h}$$

Cuestión

La luz del Sol incide sobre la superficie de la Tierra con una intensidad (energía por unidad de superficie) de 1400 W/m^2. Suponiendo que la longitud de onda promedio de la luz solar es de 600 nm, calcular el número de fotones que inciden sobre un área de 1 cm^2 de la superficie de la Tierra cada segundo (Sol.: $4.2 \cdot 10^{17}$ fotones).

Aplicaciones del efecto fotoeléctrico

Paneles solares

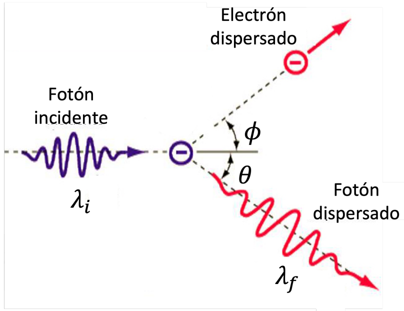
Células fotoeléctricas

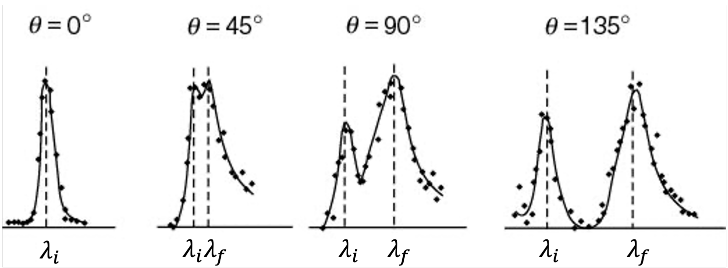
Medidores lumínicos

Contadores

Control de llenado

El efecto Compton

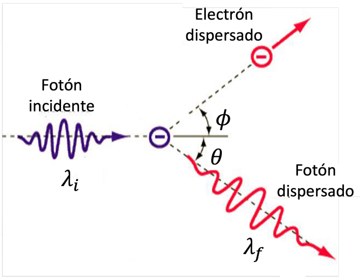




El efecto Compton

Efecto Compton

El efecto Compton consiste en el aumento de la longitud de onda de un fotón cuando interacciona con un electrón.



El efecto Compton se puede explicar aceptando que el fotón transporta una cierta cantidad de movimiento, que se relaciona con su energía como

$$\varepsilon = pc,$$

Entonces

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

Por conservación de la energía, las longitudes de onda incidente y dispersada verifican

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Cuestión

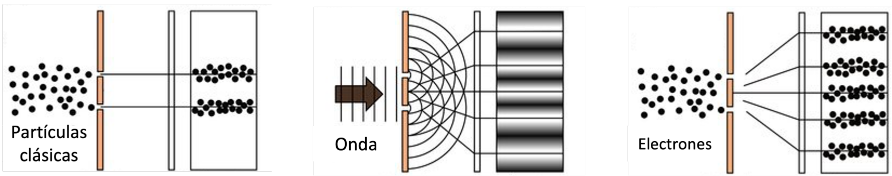
Un fotón de rayos X de longitud de onda 6.00 pm realiza una colisión frontal con un electrón, de manera que el fotón dispersado se mueve en el sentido contrario al del fotón incidente. El electrón está inicialmente en reposo. Calcular la variación en la longitud de onda del fotón tras colisionar con el electrón (Sol.: 4.8 pm).

Hipótesis de de Broglie

Los estudios acerca de la naturaleza de la luz indican que ésta tiene un comportamiento dual: ondulatorio y corpuscular.

La luz se propaga en forma ondulatoria, pero presenta propiedades corpusculares cuando interacciona con la materia.

EXPERIMENTO DE LA DOBLE RENDIJA



Hipótesis de de Broglie

Todo objeto físico tiene un comportamiento dual: se propaga como una onda e intercambia energía como una partícula. La frecuencia y longitud de onda de una partícula de energía E y momento p están dadas por

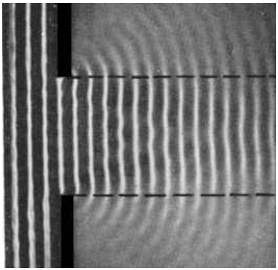
$$\boxed{\nu = \frac{E}{h}} \qquad \boxed{\lambda = \frac{h}{p},}$$

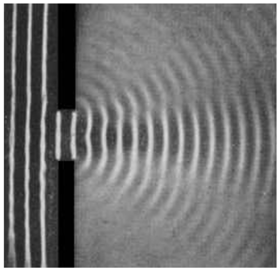
llamadas relaciones de de Broglie.

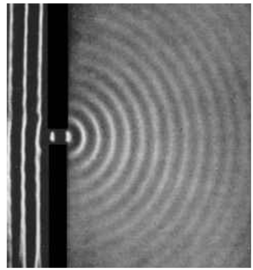
Hipótesis de de Broglie

Difracción

La difracción es el conjunto de fenómenos que tienen lugar cuando una onda se encuentra con algún obstáculo



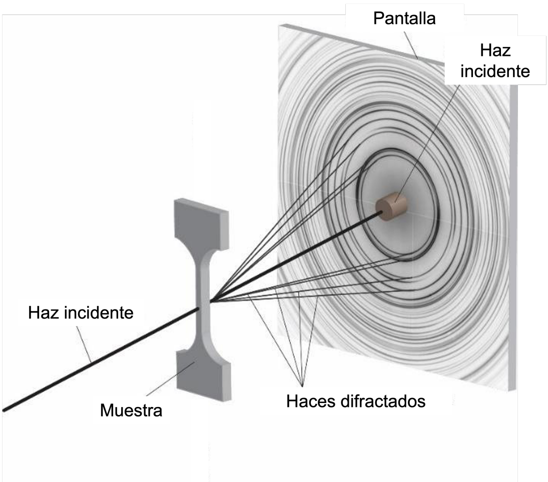




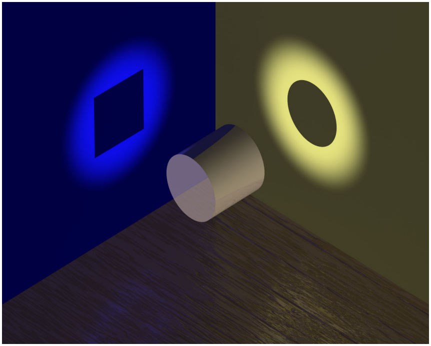
La difracción de las ondas permite, por ejemplo, que podamos escuchar sonidos en una habitación contigua. También constituye una potente herramienta de estudio de sistemas físicos.

Hipótesis de de Broglie

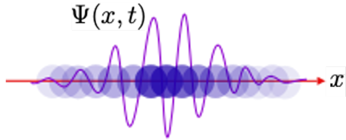
EXPERIMENTO DE DIFRACCIÓN



Hipótesis de de Broglie



Así pues, a cada partícula material se le puede asignar una onda, y viceversa.



La onda asociada a una partícula verifica una ecuación de ondas, llamada ecuación de Schrödinger

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t)+V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}}$$

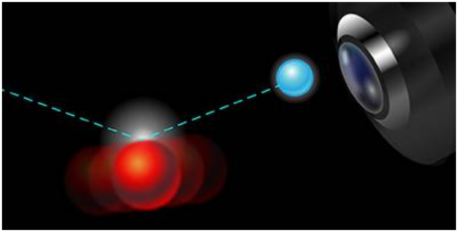
Cuestión

¿Con qué longitud de onda se propaga

- un electrón sometido a un potencial de 1 V (1.23 nm);
- un balón de 1.5 kg de masa moviéndose a 10 km/h? ($1.6\cdot10^{-34}$ m)

El principio de incertidumbre

Supongamos que queremos conocer dónde se encuentra un electrón en reposo.



- Para ello debemos "iluminarlo" con una radiación de longitud de onda comparable con el tamaño del electrón. En otras palabras, sobre el electrón debe incidir un fotón de cierta longitud de onda.
- Pero el fotón tiene una cierta cantidad de movimiento, dada por

  $$p = \frac{h}{\lambda},$$

  y parte de ella es transferida al electrón cuando se produce la interacción entre ambos. En ese caso, el hecho de medir la posición de un electrón modifica su cantidad de movimiento. Así pues, al medir la posición del electrón no podemos saber si el electrón está en reposo o en movimiento. En otras palabras, existe una cierta indeterminación Δp_x en la cantidad de movimiento del electrón.
- En principio, podemos reducir esta indeterminación aumentando la longitud de onda del fotón incidente pero, en ese caso, la radiación incidente no permitirá enfocar convenientemente al electrón. En otras palabras, existirá una cierta indeterminación Δx en la posición del electrón.

El principio de incertidumbre

Principio de incertidumbre

No es posible conocer con absoluta precisión la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Las indeterminaciones respectivas verifican

$$\boxed{\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},}$$

donde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ se llama constante de Planck reducida.

- El principio de incertidumbre es una característica general de la naturaleza, consecuencia del carácter cuántico de la Naturaleza. Esencialmente, indica que el hecho de medir una cierta magnitud afecta inevitablemente a su valor.
- Las incertidumbre Δp_x y Δx son independientes de la precisión de los instrumentos de medida utilizados, o de los detalles experimentales.
- Existe también una relación de incertidumbre entre el valor de la energía y el tiempo empleado en su medida:

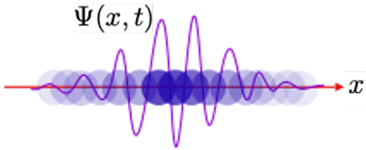
$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Cuestión

- Un electrón se mueve con una velocidad de 1000 m/s. Si se trata de localizar el electrón con luz visible de $\lambda = 550$ nm, la incertidumbre en la posición del electrón es igual a la longitud de onda de la luz. Calcular la incertidumbre en la velocidad del electrón (Sol.: 105.2 m/s).
- Repetir el cálculo para una pelota de golf de 45 g de masa que se mueve a 60 m/s (Sol.: $2.13 \cdot 10^{-27}$ m/s).

Significado físico de la función de onda

¿Qué significa físicamente la función de onda asociada a una partícula?



Significado físico

El módulo al cuadrado de la función de onda, $|\Psi(\vec{r},t)|^2$, es igual a la densidad de probabilidad de encontrar a una partícula en la posición $\vec{r}$ en el instante t. La probabilidad de que la partícula se encuentre en un volumen V es

$$\boxed{P(V,t) = \int_V |\Psi(\vec{r},t)|^2 d\vec{r}}$$

Como la partícula se debe encontrar en algún lugar del espacio, se debe verificar la condición de normalización:

$$\int_{\substack{\text{Todo el}\\ \text{espacio}}} |\Psi(\vec{r},t)|^2 d\vec{r} = 1$$

Magnitudes físicas y operadores

En Mecánica Cuántica, las magnitudes físicas tampoco adoptan un valor definido. Sólo se puede conocer la probabilidad de que una determinada magnitud física tome un cierto valor.

El valor de una magnitud corresponde al valor medio de los posibles resultados que se pueden obtener:

$$\boxed{A \equiv \langle A \rangle \pm \Delta A,}$$

donde el valor medio $\langle A \rangle$ se calcula como

$$\langle A \rangle = \int_{\substack{\text{Todo el}\\ \text{espacio}}} \Psi^*(\vec{r}, t)\hat{A}\Psi(\vec{r}, t)d\vec{r},$$

donde $\hat{A}$ es el operador asociado a la magnitud A.

Operadores y magnitudes físicas

A cada magnitud física se le asocia un operador, definido según ciertas reglas:

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \rightarrow & \vec{r}\cdot \\ \vec{p} & \rightarrow & -i\hbar\vec{\nabla} \\ E & \rightarrow & i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} \\ & \ldots & \end{array}$$

Problemas 1, 2 y 3

Problema 1

El Sol se puede considerar un cuerpo negro esférico de $7{\cdot}10^8$ m de radio. La intensidad por unidad de superficie de la radiación solar que incide sobre la Tierra, que está a $1.5{\cdot}10^{11}$ m del Sol, es de $1.4{\cdot}10^3$ W/m^2. Suponiendo que no existe atenuación en el espacio, calcular la temperatura y la densidad de radiación en la superficie del Sol. (Sol.: 5802 K, $6.5{\cdot}10^7$ W/m^2)

Problema 2

Se define la *densidad de fotones* de un haz como el número de fotones que atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección del haz por unidad de tiempo. La longitud de onda de la luz roja emitida por un láser He-Ne de 3.00 mW de potencia es 633 nm. Si el diámetro del haz del láser es de 1 mm, calcular la densidad de fotones del haz, suponiendo que la intensidad se distribuye uniformemente a través del haz. (Sol.: $1.21{\cdot}10^{22}$ m^{-2}s^{-1})

Problema 3

Cuando incide luz ultravioleta monocromática de 300 nm de longitud de onda sobre una muestra de potasio, los electrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2.03 eV. Calcular

- la energía del fotón incidente;
- la función trabajo en el potasio;
- la energía cinética máxima de los electrones si la radiación incidente tuviese una longitud de onda de 430 nm;
- la longitud de onda máxima de la radiación electromagnética para producir efecto fotoeléctrico en el potasio.

(Sol.: *a*) 4.13 eV; *b*) 2.1 eV; *c*) 0.78 eV; *d*) 590 nm)

Problemas 4 y 5

Problema 4

Compton utilizó fotones de 0.0711 nm de longitud de onda. Calcular

- la energía de estos fotones;
- la longitud de onda de los fotones dispersados en la dirección opuesta a la de los fotones incidentes;
- la energía de un fotón dispersado en esa dirección.

(Sol.: *a*) 17.43 keV; *b*) 0.0759 nm; *c*) 16.34 eV)

Problema 5

Un electrón libre está confinado en una caja de 0.10 nm de lado. Calcular

- la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón;
- la energía del electrón, suponiendo que su cantidad de movimiento es igual al valor mínimo de la incertidumbre calculado en el apartado anterior;
- la longitud de onda que tendría que tener un fotón para tener la misma energía.

(Sol.: *a*) $5.27 \cdot 10^{-25}$ m/s; *b*) 0.95 eV; *c*) 1.31 μm eV)