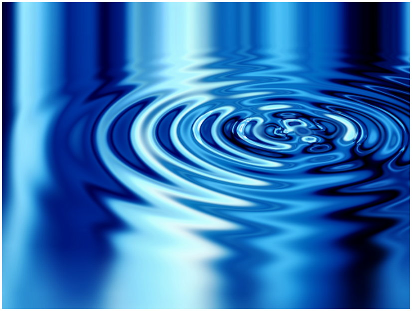
Tema 3. Ondas

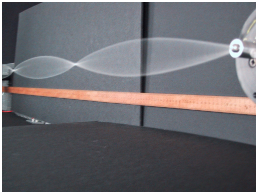
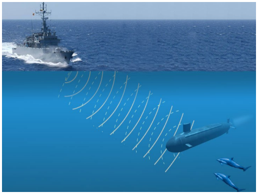
Física II, Grado en Matemáticas



Contenido

Ondas en la vida cotidiana

Los fenómenos ondulatorios están presentes de forma ubicua en nuestra vida cotidiana.

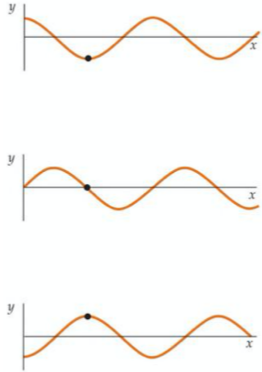




Como veremos, las ondas se propagan transportando energía y momento, pero no materia.

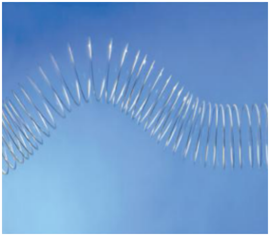
Ondas tranversales y longitudinales

Onda

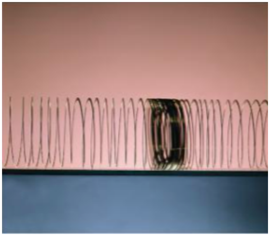
En general, se llama onda a la propagación por el espacio de una cierta perturbación.



Por ejemplo, cuando se pulsa una cuerda tensa, el desplazamiento de la cuerda con respecto a su situación de equilibrio se propaga en forma de onda. Igualmente, cuando se emite un sonido, se producen alteraciones de presión que se propagan en forma de onda. Las ondas electromagnéticas corresponden a la propagación de un campo eléctrico y uno magnético perpendicular a él.

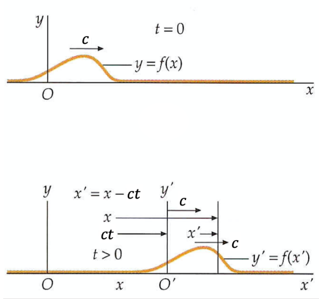


Pulso transversal



Pulso longitudinal

Función de onda



Supongamos que, en el instante $t = 0$, la forma de un pulso de onda está dada por una cierta función $y = f(x)$ referida al sistema O. Cuando el pulso se ha propagado, su forma referida a O' es también $y = f(x')$. De hecho, la forma de la onda está dada siempre por la función f, que se llama función de onda.

Las coordenadas en los dos sistemas de referencia están relacionadas como

$$x' = x - ct,$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda.

Con respecto al origen O, la forma de una onda que se propaga hacia la derecha verifica una función de onda de la forma

$$\boxed{y = f(x - ct)}$$

Si la onda se propaga hacia la izquierda, entonces

$$\boxed{y = f(x + ct)}$$

La función de onda verifica la llamada ecuación de ondas:

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 f}{dt^2}}$$

Velocidad de una onda

La velocidad de una onda depende solo de las propiedades del medio en el que se propaga. No depende, por ejemplo, de la velocidad del agente que las emite.

Por ejemplo, la velocidad del sonido emitido por la sirena de una ambulancia es la misma si la ambulancia está en reposo o en movimiento.

Ondas en una cuerda $\Longrightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{F_T}{\mu}}$

($F_T \equiv$ Tensión de la cuerda; $\mu \equiv$ densidad lineal)

Ondas sonoras en un fluido $\Longrightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

($B \equiv$ Módulo de compresibilidad; $\rho \equiv$ densidad volumétrica)

Ondas sonoras en un gas $\Longrightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{\gamma R T}{M}}$

($\gamma \equiv$ coeficiente de Poisson, $R \equiv$ constante de los gases ideales, $T \equiv$ temperatura absoluta, $M \equiv$ masa molecular)

Ondas electromagnéticas $\Longrightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$

($\varepsilon_0 \equiv$ permitividad del vacío, $\mu_0 \equiv$ permeabilidad del vacío)

Cuestión

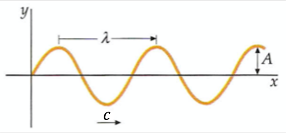
Un gusano está a 2.5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando una persona que está tendiendo en el otro extremo de la cuerda, a 5 m del gusano, lo ve. La persona da un golpe a la cuerda, de modo que por ella se propaga un pulso de onda de 3 cm de altura que se dirige hacia el gusano. Si este se mueve a 2.54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes de que le alcance el movimiento de la persona? La cuerda tiene 25 m de longitud y una masa de 1 kg, y se mantiene tensa gracias a una masa de 10 kg que cuelga de ella por un extremo.

Ondas armónicas

Una onda producida por una perturbación que cambia periódicamente se llama periódica. Todos los puntos del medio en el que se propaga una onda periódica oscilan con el mismo periodo.

Ondas armónicas

Se llama onda armónica a una onda en la que la perturbación que se propaga describe un movimiento armónico simple de cierto periodo.



En una onda armónica, la distancia mínima en el espacio entre dos puntos con iguales elongación y fase se llama longitud de onda, λ. Por definición, la onda recorre una longitud de onda en un periodo, de manera que se verifica

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda}$$

donde $\nu = \frac{1}{T}$ es la frecuencia de la onda. La función que describe la onda de la figura es

$$y(x) = A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right) \equiv A\sin(kx + \delta), \qquad k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \equiv \text{Número de onda}$$

$$\delta = 0$$

Una onda que viaja a la derecha se escribe entonces como

$$\boxed{y(x,t) = A\sin k(x - ct) = A\sin(kx - kct) \equiv A\sin(kx - \omega t)}$$

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \equiv \text{Frecuencia angular de la onda}$$

Ondas armónicas

Ejemplo 1

La función de onda de una onda armónica que se mueve en una cuerda es

$$y(x,t) = (0.03\ \text{m}) \times \sin[(2.2\ \text{m}^{-1})x - (3.5\ \text{s}^{-1})t]$$

a) ¿En qué sentido se propaga esta onda y cuál es su velocidad?
b) ¿Cuáles son la longitud de onda, el periodo y la frecuencia de esta onda?
c) ¿Cuál es la velocidad de oscilación máxima de cualquier punto de la cuerda?

a) Según la forma de la función de onda, la onda se propaga en la dirección positiva del eje OX. Por otra parte, $k = 2.2\ \text{m}^{-1}$ y $\omega = 3.5\ \text{s}^{-1}$. Por tanto,

$$c = \frac{\omega}{k} = 1.59\ \text{m/s}$$

b)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2.86\ \text{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.8\ \text{s}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 0.56\ \text{Hz}$$

c)

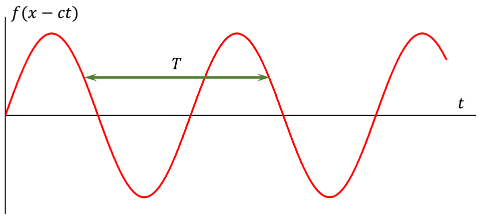
$$v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -(0.105\ \text{m/s})\cos[(2.2\ \text{m}^{-1})x - (3.5\ \text{s}^{-1})t]$$

Entonces

$$v_{y,\ \text{máx}} = 0.105\ \text{m/s}$$

Ondas armónicas

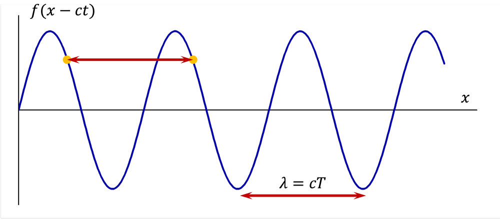
Las ondas armónicas son doblemente periódicas.



En cada posición x se describe un MAS con un periodo T que se relaciona con la longitud de onda.

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

En un instante t fijo, cada punto de la onda está desplazado de su posición de equilibrio una cantidad que depende de su posición x. La distancia entre dos puntos con igual valor de la función de onda y de su fase es la longitud de onda λ.



Cuestión

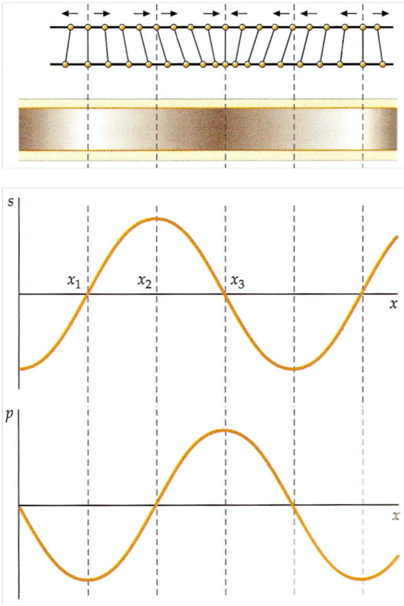
Demostrar que la siguiente función es doblemente periódica:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

Ondas de sonido

Ondas de sonido

Las ondas de sonido se deben a variaciones de densidad (o bien de presión) originadas por un agente mecánico oscilante.



El desplazamiento de los átomos con respecto a sus posiciones de equilibrio es

$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \omega t),$$

y los cambios de presión están desfasados $\frac{\pi}{2}$ con respecto a los desplazamientos:

$$p(x,t) = p_0 \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -p_0 \cos(kx - \omega t),$$

donde

$$p_0 = \rho\omega c s_0$$

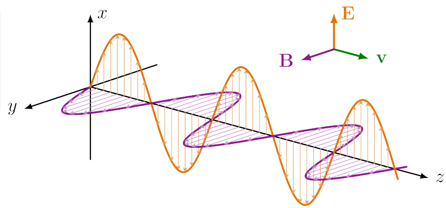
Cuestión

Una onda de un sonido intenso típico con una frecuencia de 1 kHz tiene una amplitud de presión de 10^{-4} atm. En un instante dado, ¿cuál es el máximo desplazamiento de las moléculas de aire en un punto?

Ondas electromagnéticas

Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas se deben a la oscilación de un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares.

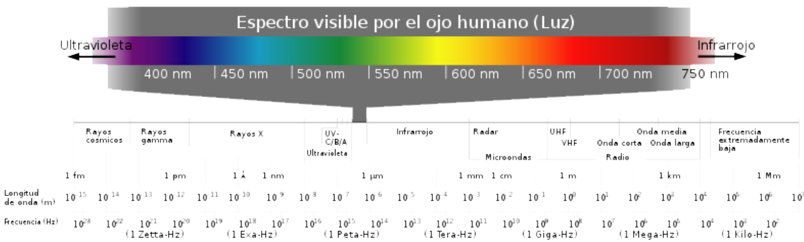


https://www.geogebra.org/m/xhYwXSsH

Las ondas electromagnéticas se propagan incluso en ausencia de medios materiales con una velocidad constante

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Las ondas electromagnéticas existen en un amplio rango de longitudes de onda, conocido como espectro electromagnético.

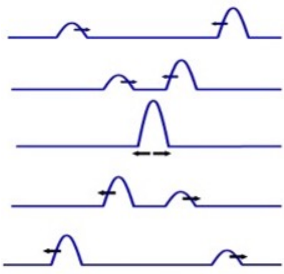


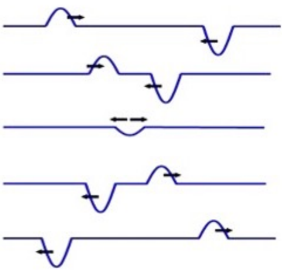
Principio de superposición

Varias ondas propagándose por un medio pueden interaccionar entre sí.

Principio de superposición

Cuando dos (o más) ondas se combinan, la onda resultante es igual a la suma algebraica de las ondas individuales.





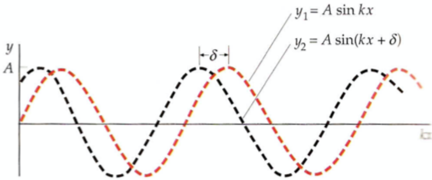
Cuestión

¿Verifica la suma algebraica de dos ondas la ecuación de ondas?

La superposición de ondas de frecuencias similares se llama interferencia.

Ondas de igual frecuencia y amplitud

El resultado de la superposición de dos ondas de igual frecuencia y amplitud depende de la diferencia de fase entre ambas.



Sean $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ dos ondas armónicas. Entonces

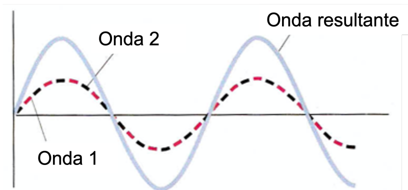
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$= A_0 \sin(kx - \omega t) + A_0 \sin(kx - \omega t + \delta),$$

o bien, teniendo en cuenta la identidad

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

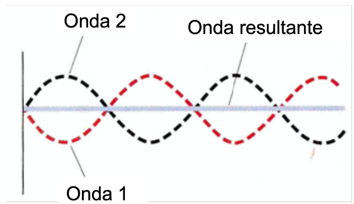
$$\boxed{y(x,t) = \left[2A_0 \cos\frac{1}{2}\delta\right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right)}$$

$\delta = 0$ (ondas en fase)



Interferencia constructiva

$\delta = \pi$ (ondas en oposición de fase)



Interferencia destructiva

Diferencia de fase debida a diferencia de trayectos

Consideremos dos focos situados en S_1 y S_2 que emiten ondas de igual frecuencia y amplitud en fase. En un cierto punto P, las ondas emitidas por los dos focos son

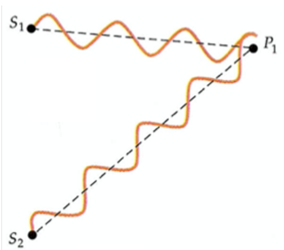
$$A_1 = A_0 \sin(kx_1 - \omega t), \qquad A_2 = A_0 \sin(kx_2 - \omega t)$$

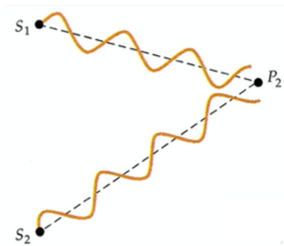
La diferencia de fase entre ambas ondas es

$$\delta = [kx_2 - \omega t - (kx_1 - \omega t)] = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$$

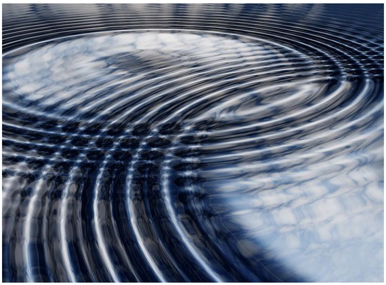
$$\boxed{\delta = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda}}$$

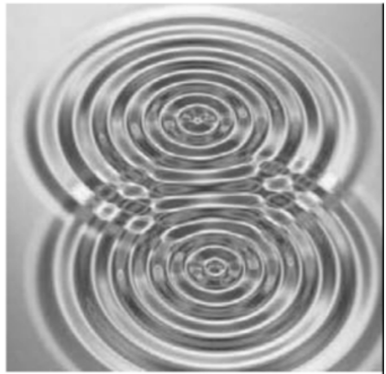
$$A = 2A_0 \cos\frac{1}{2}\delta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} \Delta x = n\lambda & \text{Int. constructiva} \\ \Delta x = \dfrac{2n+1}{2}\lambda & \text{Int. destructiva} \end{array}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$





Diferencia de fase debida a diferencia de trayectos





Pulsaciones

Pulsación

La superposición de dos ondas de frecuencia similar produce un fenómeno denominado pulsación.

Superposición de dos ondas sonoras en fase de frecuencias ω_1 y ω_2 en un punto fijo:

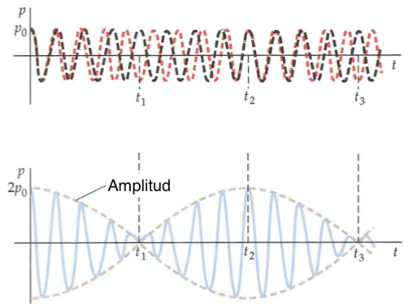
$$P(x,t) = 2P_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

$$\boxed{P(x,t) = 2P_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \sin(\omega_m t)}$$

En el instante $t = 0$, las ondas interfieren constructivamente. Como sus fases no son iguales, las ondas se van desfasando conforme se propagan hasta que, en un cierto instante t_1, su desfase es π y existe interferencia destructiva. En el instante t_2 se vuelve a dar una interferencia constructiva.

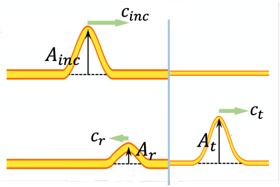
$$\omega_b = \Delta\omega \quad \text{(Frecuencia de pulsación)}$$

→ Ejemplo de pulsación ←

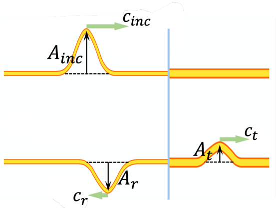


Reflexión y transmisión de ondas

Cuando una onda incide sobre una frontera entre dos medios con distintas velocidades de onda, parte de la onda se refleja y otra parte se transmite de un medio a otro.



$x = 0$



$x = 0$

Las ondas incidente, reflejada y transmitida son

$$\psi_{inc}(x,t) = A_{inc}\sin(k_1 x - \omega t)$$
$$\psi_r(x,t) = A_r \sin(-k_1 x + \omega t), \qquad k_i = \frac{\omega}{c_i}$$
$$\psi_t(x,t) = A_t \sin(k_2 x - \omega t)$$

y en la intercara ($x = 0$) se debe verificar

$$\psi_{inc}(0,t) + \psi_r(0,t) = \psi_t(0,t)$$
$$\left|\frac{\partial \psi_{inc}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left|\frac{\partial \psi_r(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left|\frac{\partial \psi_t(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

De aquí,

$$A_r = \frac{c_t - c_r}{c_t + c_r} A_{inc} \qquad A_t = \frac{2c_t}{c_t + c_r} A_{inc}$$

$$\boxed{r = \frac{A_r}{A_{inc}} = \frac{c_t - c_r}{c_t + c_r}}$$

Coeficiente de reflexión

$$\boxed{t = \frac{A_t}{A_{inc}} = \frac{2c_t}{c_t + c_r}}$$

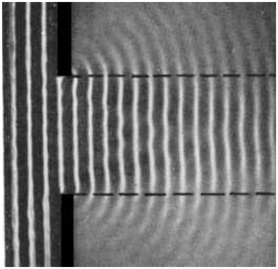
Coeficiente de transmisión

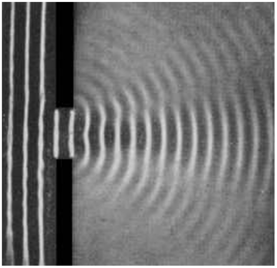
→ Ejemplos de reflexión y transmisión ←

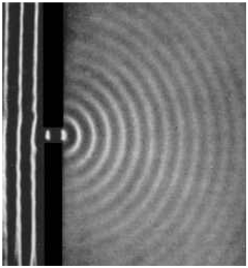
Difracción de ondas

Difracción

La difracción es el conjunto de fenómenos que tienen lugar cuando una onda se encuentra con algún obstáculo







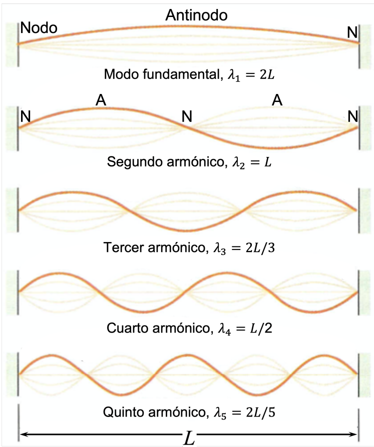
La difracción de las ondas permite, por ejemplo, que podamos escuchar sonidos en una habitación contigua. También constituye una potente herramienta de estudio de sistemas físicos.

Ondas estacionarias

Cuando las ondas se propagan en un medio confinado en el espacio, la onda transmitida y reflejada pueden dar lugar a ondas estacionarias.

$$y_1(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2(x,t) = A_0 \sin(kx + \omega t)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x,t) = 2A_0 \sin kx \cos \omega t}$$

Las ondas estacionarias se forman únicamente para determinadas frecuencias.



Frecuencias y modos normales

Se llaman frecuencias normales de vibración a las que producen modos estacionarios. La función de onda correspondiente a cada una se llama modo normal de vibración.

La frecuencia normal más baja se llama modo fundamental (o primer armónico), y produce el patrón de la figura de arriba. La siguiente frecuencia da lugar al llamado segundo armónico, y las siguientes a los armónicos tercero, cuarto, etc.

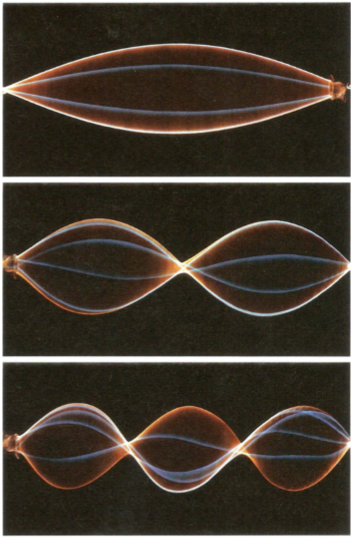
$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \equiv \frac{\lambda_1}{n}}$$

$$\boxed{\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \equiv n\nu_1}$$

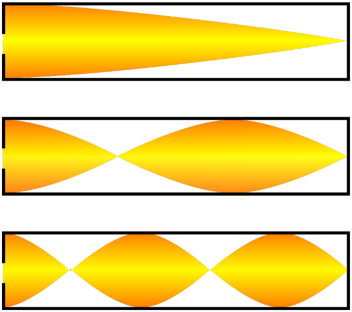
Nodos y antinodos

Se llama nodo de una onda estacionaria a un punto de la misma donde la amplitud es idénticamente nula. Se llama antinodo (o vientre) a un punto donde la amplitud es máxima.

Ondas estacionarias

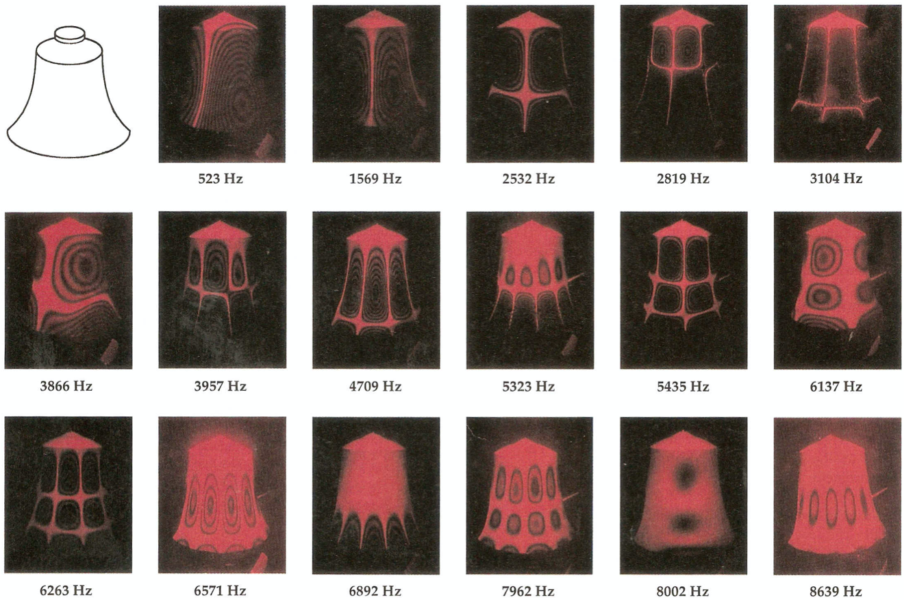


Ondas estacionarias en un tubo abierto



$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

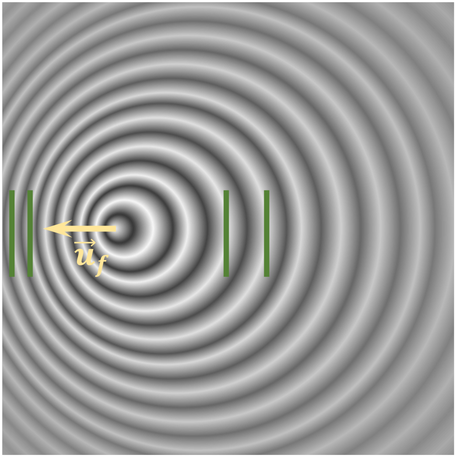
Ondas estacionarias



El efecto Doppler

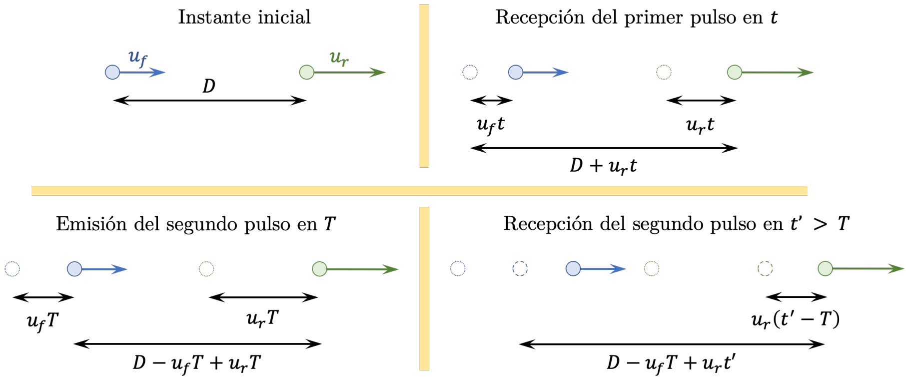
Efecto Doppler

Cuando un foco emisor de ondas y un receptor se mueven uno con respecto al otro, la frecuencia recibida depende de la velocidad relativa entre ambos.



El efecto Doppler, que se da para cualquier tipo de ondas (no solo las sonoras), tiene multitud de aplicaciones. Entre ellas, destaca la ecografía Doppler, que es una potente técnica de diagnóstico en medicina.

El efecto Doppler



Supongamos que el foco de las ondas y el receptor se mueven en el mismo sentido con velocidades u_f y u_r, respectivamente. Supongamos también que el foco emite una onda en el instante $t = 0$, cuando receptor y foco están separados una distancia D. La onda se propaga hacia la derecha con una velocidad c (que es independiente de u_f), y se detecta en el receptor en un cierto instante t. En ese instante, el receptor se ha movido a la derecha una cantidad $u_r t$, de modo que se verifica

$$D + u_r t = ct \tag{1}$$

El segundo pulso se emite en el instante T, cuando el foco y el receptor están separados una distancia $D - u_f T + u_r T$. Como antes, el pulso se propaga hacia la derecha y, en el instante t', se detecta en el receptor. En ese instante se verifica

$$D - u_f T + u_r t' = c(t' - T) \tag{2}$$

El efecto Doppler

Restando (2) y (1) y reordenando resulta

$$(c - u_r)(t' - t) = (c - u_f)T,$$

donde $t' - t$ es el tiempo que transcurre entre que el receptor detecta dos pulsos sucesivos, es decir, el período de la onda que detecta el receptor. En definitiva

$$\nu_r = \frac{c - u_r}{c - u_f}\nu_f, \tag{3}$$

donde ν_f es la frecuencia que emite el foco.
La ecuación (3) se puede generalizar a la situación de movimiento arbitrario entre el foco y el receptor. El resultado es

$$\boxed{\nu_r = \frac{c \pm u_r}{c \pm u_f}\nu_f,}$$

donde los signos se escogen de modo que la frecuencia percibida disminuya si foco y receptor se acercan.

Cuestión

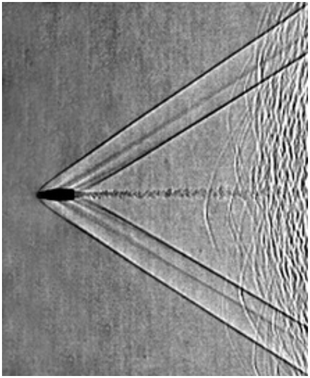
La frecuencia de la bocina de un coche parado es de 400 m/s. Determinar

a) La frecuencia observada si el coche se mueve con una velocidad de 34 m/s a través del aire en reposo hacia un receptor en reposo.

b) La frecuencia observada si el coche está parado y un receptor se mueve con velocidad de 34 m/s hacia el coche.

Ondas de choque

Si la velocidad del foco (o del receptor) u_f es mayor que la velocidad de la onda c, las ondas no se pueden formar delante del foco, sino detrás de él, formando ondas de choque.



$$\text{Número de Mach} = \frac{u_f}{c}$$

Problemas 1 a 3

Problema 1

Una onda armónica transversal de 40 Hz de frecuencia se propaga por una cuerda. En un cierto instante, dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados en $\pi/6$. Calcular

- la longitud de la onda;
- la diferencia de fase entre dos desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí;
- la velocidad de la onda.

(Sol.: 0.6 m; 0.4π rad; 24 m/s)

Problema 2

Dos altavoces enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 680 Hz. Determinar los puntos entre los altavoces a lo largo de la línea que los une para los que la intensidad del sonido es *a*) máxima y *b*) mínima. Despreciar la variación de intensidad de cada altavoz con la distancia.

(Sol.: *a*) 0, $\pm$ 25 cm, $\pm$ 50 cm, $\pm$ 75 cm; *b*) $\pm$ 12.5 cm, $\pm$ 37.5 cm, $\pm$ 62.5 cm, $\pm$ 87.5 cm)

Problema 3

La cuerda de un piano se puede romper si la tensión que soporta es mayor que 700 N. Una cuerda de 3 m de longitud y densidad lineal $\mu = 0.0025$ kg/m tiene dos frecuencias resonantes consecutivas a 252 Hz y 336 Hz. Comprobar si esta cuerda puede utilizarse con seguridad en el mecanismo de un piano.

Problemas 4 a 6

Problema 4

Un murciélago que vuela hacia un obstáculo a una velocidad de 12 m/s emite pulsos sonoros breves y de alta frecuencia con una frecuencia de repetición de 80 Hz. Calcular el intervalo de tiempo transcurrido entre los pulsos de eco percibidos por el murciélago.

(Sol.: 11.6 ms)

Problema 5

Una unidad de radar de la policía transmite microondas de frecuencia $3{\cdot}10^{10}$ Hz con una velocidad en el aire de $3{\cdot}10^{8}$ m/s.

- Un coche se aleja de este radar a una velocidad de 140 km/h. ¿Cuál es la diferencia de frecuencia entre la señal reflejada por el coche, y la que se recibe en el radar?
- Repetir el cálculo si el coche de la policía se mueve a 60 km/h en la misma dirección que el otro coche.

(Sol.: *a*) 7.78 kHz; *b*) 4.44 kHz)

Problema 6

Un coche se aproxima a una pared reflectora. Un observador inmóvil situado detrás del coche escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del coche, y otro de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. Calcular

- la velocidad del coche;
- la frecuencia de la bocina;
- la frecuencia que escucha el conductor del coche procedente de la reflexión del sonido en la pared.

(Sol.: *a*) 25.2 m/s; *b*) 800 kHz; *c*) 926 Hz)