Tema 2. Oscilaciones

Física II, Grado en Matemáticas

Contenido

Oscilaciones

Oscilación

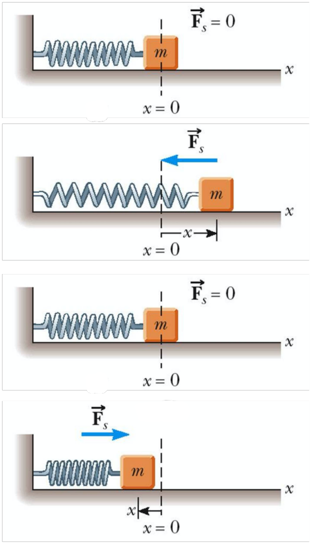
En general, se llama oscilación a un movimiento en el que, tras un cierto tiempo, el objeto que se mueve vuelve a su posición inicial.

Las oscilaciones están presentes en infinidad de procesos físicos y situaciones cotidianas. En este tema, nos centraremos en un tipo particular y sencillo de oscilación, que se caracteriza por tener una aceleración proporcional al desplazamiento: el movimiento armónico simple.

Movimiento armónico simple

Movimiento armónico simple

Se llama movimiento armónico simple (MAS) al que tiene una aceleración que es proporcional, pero de sentido opuesto, al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio.



Por ejemplo, un cuerpo sujeto a un muelle está sometido a la fuerza elástica dada por la ley de Hooke:

$$F_s = -kx,$$

esto es,

$$ma_x = m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

La solución de la ecuación (1) es

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta),}$$

donde A es la amplitud del MAS, δ es su fase inicial y

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

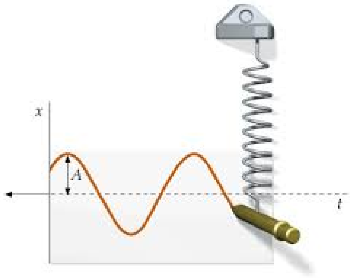
es su frecuencia angular. El período del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Comentario

La cantidad $x(t)$ se llama elongación del MAS

Movimiento armónico simple



- La posición instantánea en un MAS se puede escribir también como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A\sin(\omega t + \pi/2 + \delta) = \\ = A\sin(\omega t + \delta')$$

- La fase inicial de un MAS se puede hacer siempre igual a cero eligiendo convenientemente el instante inicial.
- En el caso de dos sistemas oscilantes con igual frecuencia, se puede elegir la fase inicial igual a cero para uno de ellos. Entonces

$$x_1(t) = A_1 \cos\omega t$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta),$$

donde δ es el desfase entre ambos osciladores.

- Si $\delta = 0$, se dice que los osciladores están en fase. Si $\delta = \pi$, están en oposición de fase.
- La velocidad y aceleración de un MAS son

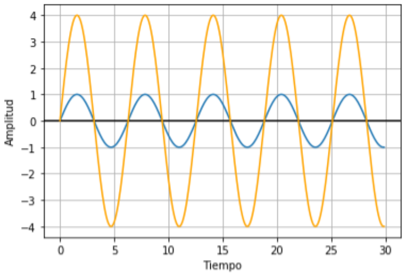
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin\omega t \qquad (2)$$

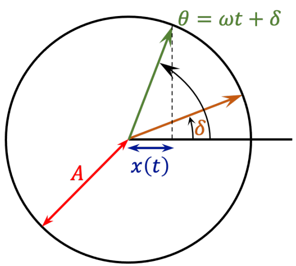
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos\omega t$$

Movimiento armónico simple

Cuestión

Dos masas iguales están unidas a dos muelles idénticos que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Uno de los muelles se estira 10 cm, y el otro se estira 3 cm. Si las dos masas se sueltan al mismo tiempo, ¿cuál de las dos alcanza primero la posición de equilibrio?





Consideremos una partícula describiendo un movimiento circular uniforme de radio A. La componente x de su posición es

$$x(t) = A\cos\theta(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

MAS y movimiento circular

Las componentes cartesianas de un movimiento circular uniforme son movimientos armónicos simples.

Cuestión

¿Describe la componente $y(t)$ de un movimiento circular uniforme un MAS?

→ Equivalencia entre el MAS y el MCU ←

Energía de un MAS

La energía cinética de un objeto describiendo un MAS es

$$K = \frac{1}{2} m v^2,$$

esto es, teniendo en cuenta (2),

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Su energía potencial elástica, por otra parte, es

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

esto es,

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

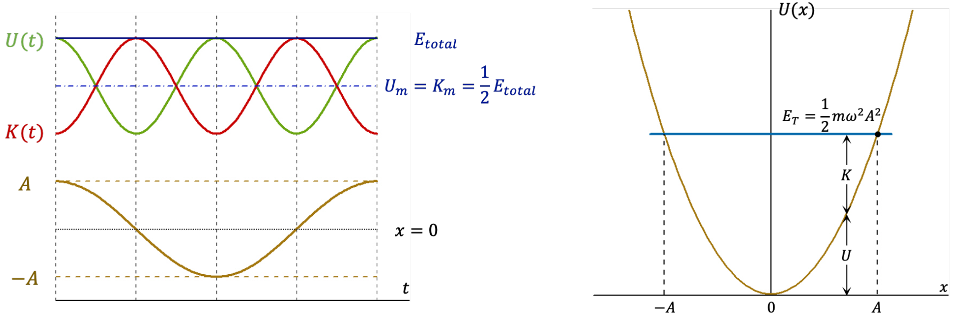
La energía mecánica total del oscilador es entonces

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2}$$

Energía total de un MAS

La energía mecánica total de un oscilador es proporcional al cuadrado de su amplitud.

Energía de un MAS



Cuestión

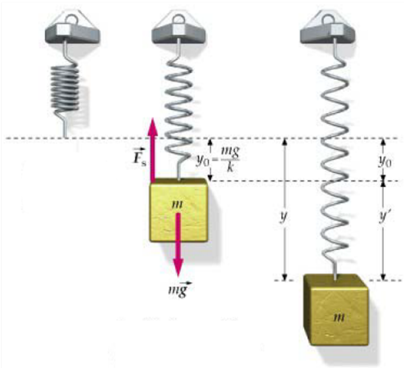
Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s.

a) ¿Cuál es la energía total del objeto? (0.024 J)

b) ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto? (0.126 m/s)

c) ¿En qué posición x_1 se verifica que el módulo de la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo? (3.5 cm)

Objeto colgado de un muelle vertical



Si y_0 es el alargamiento del muelle en equilibrio cuando se cuelga una masa m, se verifica

$$mg = F_s = ky_0, \tag{3}$$

suponiendo que y es positivo cuando se dirige hacia abajo. Cuando el muelle se estira una cantidad y, se verifica

$$F = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky + mg,$$

o bien, definiendo $y' = y - y_0$,

$$m\frac{d^2y'(t)}{dt^2} = -k(y' + y_0) + mg = -ky'$$

Esto es,

$$y'(t) = A\cos(\omega t + \delta),$$

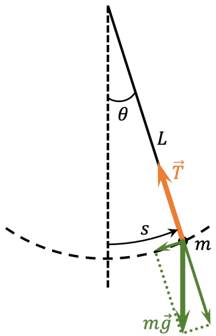
así que

$$\boxed{y(t) = \frac{mg}{k} + A\cos(\omega t + \delta)}$$

Cuestión

¿Cuánto vale la energía mecánica total en este caso?

El péndulo simple



Consideremos el péndulo simple de la figura de la izquierda. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton se escribe

$$-mg\sin\theta = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (4)$$

donde s es el desplazamiento del péndulo sobre su trayectoria. Pero

$$s = L\theta$$

y, si el ángulo de separación es pequeño,

$$\sin\theta \approx \theta,$$

de manera que (4) se escribe

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta,$$

esto es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta,$$

que es la ecuación de un MAS de frecuencia

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

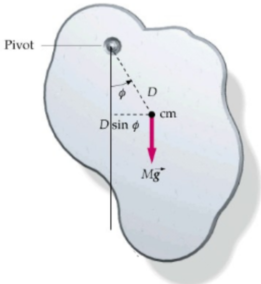
El ángulo θ varía en el tiempo como

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \delta)$$

El péndulo físico

Péndulo físico

Un péndulo físico es un objeto extenso que puede girar alrededor de un eje que no pasa por su centro de masas.



En la figura de la derecha, el momento de fuerza ejercido por el peso con respecto al pivot está dirigido hacia dentro del plano de la diapositiva, y su módulo es

$$\tau = MgD\sin\phi$$

o bien, para ϕ pequeño,

$$\tau = MgD\phi,$$

Teniendo en cuenta la dirección del ángulo ϕ en la figura, la velocidad angular del movimiento está orientada hacia fuera, de manera que la segunda ley de Newton para la rotación se escribe

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -MgD\phi, \tag{5}$$

donde I es el momento de inercia del objeto. La expresión (5) es la ecuación de un MAS de frecuencia angular

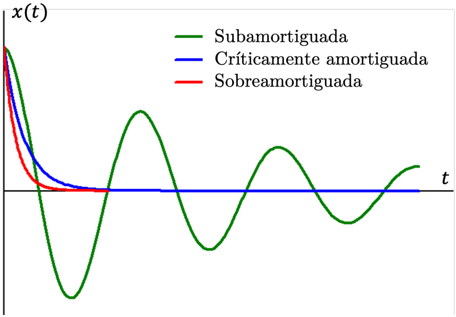
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}}$$

Oscilaciones amortiguadas

En situaciones reales, las fuerzas disipativas actúan sobre los osciladores, y pueden llegar a detenerlos. Se habla entonces de oscilaciones amortiguadas.

Las oscilaciones amortiguadas pueden ser:

- Subamortiguadas: Las fuerzas disipativas no evitan las oscilaciones, aunque la amplitud de éstas disminuye en el tiempo hasta que, eventualmente, el oscilador se detiene.
- Sobreamortiguadas: Las fuerzas disipativas son tan intensas que el sistema no llega a describir una oscilación completa. Ejemplo: un oscilador vertical sumergido en miel.
- Críticamente amortiguadas: El amortiguamento es el mínimo requerido para que no se produzcan oscilaciones.

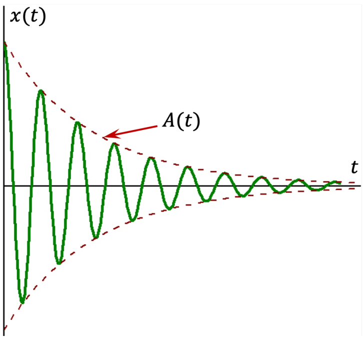


MAS amortiguado

Típicamente, las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad del objeto que se mueve. En el caso de un MAS amortiguado, la ecuación de movimiento es entonces

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 x(t) - \gamma\frac{dx(t)}{dt}, \tag{6}$$

donde γ se llama coeficiente de amortiguamiento. La solución de la ecuación (6) depende del valor de γ:



$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \delta)}$$

con $\tau = \dfrac{m}{\gamma}$ y

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2},}$$

donde ω_0 es la frecuencia del MAS sin amortiguamiento.

La amplitud del movimiento disminuye en el tiempo como

$$A(t) = A_0 e^{-t/2\tau},$$

y, por tanto, también su energía:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 e^{-t/\tau} = E_0 e^{-t/\tau}$$

MAS amortiguado

El comportamiento del oscilador depende del valor del cociente $\frac{1}{2\omega_0\tau} = \frac{\gamma}{2m\omega_0}$:

- Si $\frac{\gamma}{2m\omega_0} < 1$, la frecuencia ω es real, y el movimiento es subamortiguado.
- Si $\frac{\gamma}{2m\omega_0} > 1$, la frecuencia ω es imaginaria, por lo que no se produce oscilación. Este movimiento es sobreamortiguado.

El valor crítico del coeficiente de amortiguamiento es entonces

$$\boxed{\gamma_c = 2m\omega_0}$$

Se define el factor de calidad de un oscilador como

$$Q = \omega_0\tau$$

Calculemos

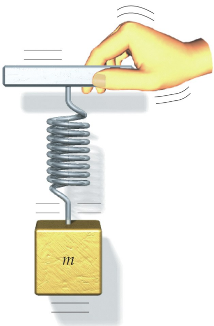
$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}E_0 e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}E(t) \implies \frac{dE}{E} = -\frac{dt}{\tau}$$

Si el amortiguamiento es débil, el cambio de energía en un ciclo se puede estimar como

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{ciclo} = \frac{T}{\tau} \approx \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{2\pi}{Q} \implies \boxed{Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{ciclo}}}$$

El factor Q es una medida de la pérdida de energía por ciclo en un MAS amortiguado.

MAS forzado

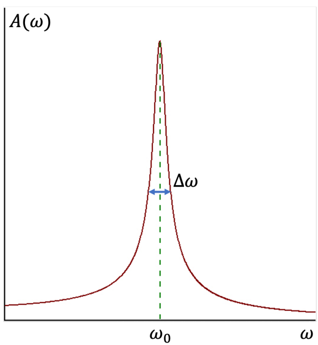


Para mantener en movimiento un MAS amortiguado es necesario suministrar energía al sistema. Un movimiento de este tipo se llama oscilación forzada.

- Cuando se comienza a forzar el oscilador, el movimiento es complejo. Al cabo de un periodo transitorio, se alcanza un estacionario en el que el cuerpo oscila con la misma frecuencia de la fuerza externa aplicada.
- En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza externa es igual a la energía disipada en cada ciclo por efecto del amortiguamiento.
- La amplitud (y la energía) de un oscilador forzado depende de la frecuencia de la fuerza externa.

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

Si la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la frecuencia natural del sistema ω_0, la amplitud del movimiento crece. Este fenómeno se llama resonancia, y la frecuencia ω_0 se llama frecuencia de resonancia.



Resonancia






Resonancia

Millenium Bridge, Londres

Puente de Alconétar, Cáceres

Problemas 1 y 2

Problema 1

Un objeto de 2 kg de masa está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8 cm, y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de forma que la velocidad inicial es de 0.3 m/s. Calcular

- la altura máxima con respecto al suelo a la que se eleva el objeto;
- el tiempo que tardará el objeto en alcanzar la altura máxima por primera vez;
- la velocidad mínima que debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado.

(Sol.: 6.7 cm; 0.26 s; 0.542 m/s)

Problema 2

La figura de la derecha muestra un disco uniforme de radio $R = 0.8$ m y masa 6 kg con un pequeño agujero a una distancia d de su centro que puede servir como punto de pivote. Determinar

- el valor de d para que el periodo de este péndulo sea de 2.5 s;
- la distancia d para que el péndulo tenga el mínimo periodo posible;
- el valor de este periodo mínimo.

(Sol.: 0.245 m; 0.566 m; 2.13 s)

Problemas 3, 4 y 5

Problema 3

Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se atan a los dos extremos de un muelle de constante elástica k y se hacen oscilar. Demostrar que la frecuencia de oscilación de este sistema es $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ se llama masa reducida del sistema.

Problema 4

Un bloque de madera de dimensiones $8 \times 7 \times 6$ cm^3 y densidad relativa 0.5 flota en agua con su arista más larga en la dirección de la vertical. Desde esta posición se empuja el bloque hacia abajo sumergiéndolo 2 cm con respecto a la línea de flotación. Demostrar que este bloque realiza entonces un MAS, y calcular el periodo de su movimiento.

(Sol.: 0.4 s.)

Problema 5

Un oscilador amortiguado tiene un periodo de 3 s, y su amplitud disminuye en un 5 % durante cada ciclo. Calcular

- en cuánto disminuye la energía del oscilador en cada ciclo;
- la constante de tiempo τ del oscilador;
- su factor Q.

(Sol.: 9.75 %; 29.24 s; 64.44.)