Tema 1. Momento angular y rotación

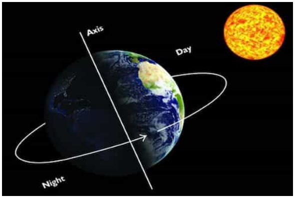
Física II, Grado en Matemáticas

Contenido

Velocidad y aceleración angular

Rotación

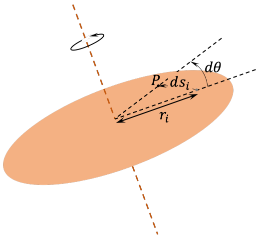
La rotación es el movimiento en el que un objeto cambia de orientación de forma que una línea (o un punto), llamada eje de rotación, permanece fija.



Velocidad y aceleración angular

Cada punto de un cuerpo que rota describe un círculo centrado en el eje de rotación. Si r_i es la distancia entre un punto P del cuerpo y el eje de rotación, cuando el cuerpo gira un ángulo $d\theta$ el punto recorre una distancia dada por

$$ds_i = r_i d\theta \quad (1)$$



Comentario

El sentido de la rotación es positivo si tiene lugar en la dirección contraria a la de las agujas del reloj.

Las cantidades r_i y s_i varían de un punto a otro del sólido, pero el desplazamiento angular $d\theta$ es el mismo para todos ellos.

Velocidad angular

Se llama velocidad angular de un cuerpo en rotación a la variación del desplazamiento angular con respecto al tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (s^{-1})$$

Comentario

Todos los puntos de un objeto que gira tienen la misma velocidad angular.

Velocidad y aceleración angular

Aceleración angular

Se llama aceleración angular de un cuerpo en rotación a la variación de la velocidad angular con respecto al tiempo

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\theta^2}{dt^2} \quad (s^{-2})$$

Las magnitudes θ, ω y α son análogas a las s, v y a de un movimiento de traslación. Es fácil demostrar que, en un movimiento circular uniforme

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0),$$

y en un movimiento circular uniformemente acelerado

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2,$$

donde la velocidad angular varía como

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

y se verifica

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha\left[\theta(t) - \theta_0\right]$$

Velocidad y aceleración lineales

Los puntos de un objeto en rotación poseen una velocidad lineal, que es tangente a la trayectoria y que está dada por

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt} = r_i \omega,$$

donde hemos tenido en cuenta (1). Análogamente, la aceleración tangencial es

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{r_i d\omega}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r_i \alpha,$$

y la centrípeta

$$a_c = \frac{v_i^2}{r_i} = \frac{r_i^2 \omega^2}{r_i} = r_i \omega^2$$

Cuestión

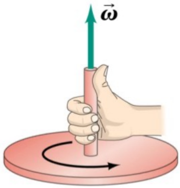
Un disco compacto gira partiendo del reposo a 500 rev/min en 5.5 s.

a) ¿Cuál es su aceleración angular, supuesta constante? (9.52 s^{-2})

b) ¿Qué distancia recorre un punto del contorno del disco, situado a 6 cm del centro, en ese tiempo? (863.9 cm)

c) Calcular la velocidad de traslación de la periferia del disco cuando gira a 200 rev/min (1.26 m/s).

Vector velocidad angular



Es conveniente definir la velocidad angular como un vector $\vec{\omega}$:

Vector velocidad angular

- El vector $\vec{\omega}$ es paralelo al eje de rotación en cada instante.
- El sentido de $\vec{\omega}$ está dado por la regla de la mano derecha: es el sentido en el que apunta el dedo pulgar de la mano derecha si el resto de los dedos ejecutan el movimiento de rotación en cada instante.

Entonces, si $\hat{e}$ es un vector unitario en la dirección del eje de rotación,

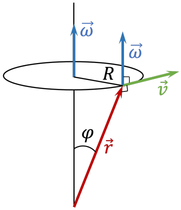
$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}$$

Según la figura de la derecha, se verifica

$$v = \omega R = \omega r \sin\varphi$$

Teniendo en cuenta la dirección de los vectores representados, resulta entonces

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (2)$$



Vector aceleración angular

A partir de (2), el vector aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v},$$

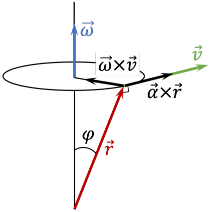
donde $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ es el vector aceleración angular. Entonces

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Si el eje de rotación no cambia en el tiempo

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{e} + \cancel{\omega\frac{d\hat{e}}{dt}} = \alpha\hat{e} \parallel \vec{\omega},$$

de modo que el término $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ es paralelo a la velocidad, y describe la aceleración tangencial. El término $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ describe entonces la aceleración centrípeta de movimiento.

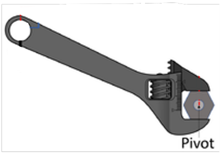


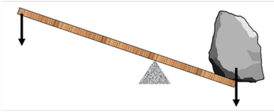
Comentario

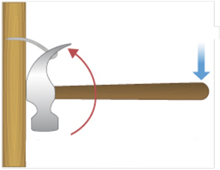
En general, $\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos, y el término $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ describe movimientos de precesión.

Momento angular

Las rotaciones se producen cuando se aplica una fuerza a cierta distancia del eje de giro.





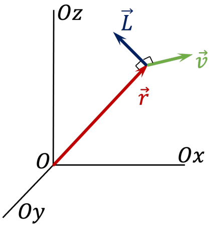


Momento angular

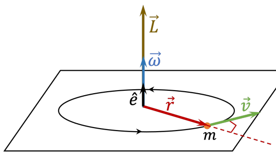
Se define el momento angular de una partícula con respecto a un punto como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v},$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula, m es su masa y $\vec{v}$ su velocidad.



Momento angular



Supongamos que una partícula describe un movimiento circular. En tal caso, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y

$$L = mrv = mr^2\omega,$$

donde ω es la velocidad angular del movimiento. Además, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están en el mismo plano, de modo que $\vec{L}$ es paralelo al eje de rotación, es decir, paralelo a $\vec{\omega}$. Entonces

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \equiv I\vec{\omega},$$

donde I se llama momento de inercia de la partícula.

Momento de inercia y momento angular

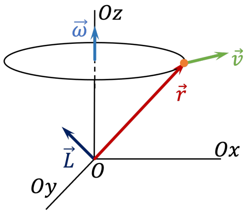
En un sistema de partículas de momento de inercia I describiendo un movimiento circular se verifica también

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

En general,

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} - m(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{r},$$

de modo que $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos.



Ecuación de movimiento para la rotación

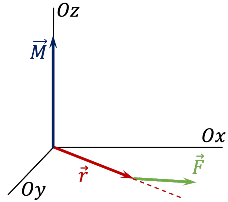
Cuando aplicamos una fuerza sobre un cuerpo este, además de acelerarse, puede rotar con respecto a un cierto eje.

Momento de una fuerza

Se define el momento de una fuerza $\vec{F}$ en torno a un punto como

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza.



Por definición,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{v} = m\cancel{\vec{v} \times \vec{v}} + m\vec{r} \times \vec{a}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} \tag{3}$$

En un movimiento circular, $\vec{L} = I\vec{\omega}$, de manera que

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Ley de Newton para la rotación

Para un objeto de momento de inercia I sometido a un momento de fuerza $\vec{M}$ que describe un movimiento circular de aceleración angular $\vec{\alpha}$,

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha},}$$

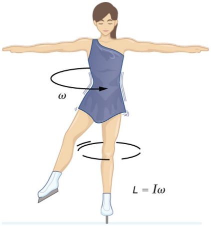
Conservación del momento angular

Consideremos un sistema sobre el que no actúe un momento de fuerza neto, $\vec{M} = \vec{0}$. En tal sistema

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = cte.}$$

Conservación del momento angular

Si el momento de fuerzas resultante que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema permanece constante.



→ Conservación del momento angular 1 ←

→ Conservación del momento angular 2 ←

Momentos de inercia

Consideremos un conjunto de partículas de masas $\{m_i\}$ que describen un movimiento circular en torno a un cierto eje a distancias $\{r_i\}$. Cada partícula tiene entonces un momento angular dado por

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

El momento angular neto de las partículas es entonces

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \equiv I\vec{\omega},$$

donde I es el momento de inercia del conjunto de partículas.

Momento de inercia

El momento de inercia de un conjunto discreto de partículas de masas $\{m_i\}$ y posiciones $\{\vec{r}_i\}$ está dado por

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

Ejemplo 1

Tres masas de 1 kg, 2 kg y 3 kg giran en el plano OXY en torno al eje OZ a distancias 3 m, 2 m y 1 m de este, respectivamente. Calcular el momento de inercia del sistema de tres masas (Sol: 20 kg·m^2).

Momento de inercia

En el caso de un conjunto continuo de partículas (como en un objeto extenso), el momento angular de un cierto elemento de volumen dV del objeto situado a una distancia r del eje de giro es

$$d\vec{L} = r^2 dm\,\vec{\omega} = r^2 \rho dV \vec{\omega},$$

El momento angular total del sistema es entonces

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \left(\int \rho r^2 dV \right) \vec{\omega},$$

de manera que el momento de inercia de un objeto extenso continuo es

$$\boxed{I = \int \rho r^2 dV}$$

El momento de inercia permite escribir de forma sencilla la energía cinética de rotación:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

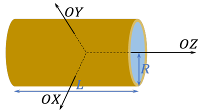
Energía cinética de rotación

La energía cinética de un objeto que rota con velocidad angular ω y momento de inercia I es

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

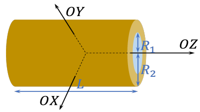
Momentos de inercia

Cilindro hueco delgado



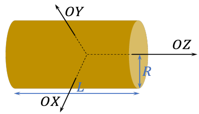
$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$$
$$I_z = mR^2$$

Cilindro hueco



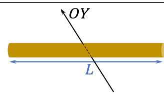
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}m\left(R_1^2 + R_2^2\right) + \frac{1}{12}mL^2$$
$$I_z = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Cilindro macizo



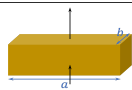
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$$
$$I_z = \frac{1}{2}mR^2$$

Varilla delgada



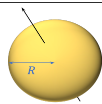
$$I_y = \frac{1}{12}mL^2$$

Prisma rectangular
(respecto a un eje normal
a una cara)



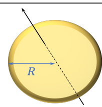
$$I = \frac{1}{12}m\left(a^2 + b^2\right)$$

Esfera maciza
(respecto al diámetro)



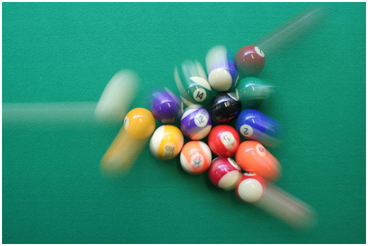
$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Esfera hueca
(respecto al diámetro)



$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

Centro de masas



La dinámica de los sistemas de partículas puede ser muy complicada, pero se simplifica introduciendo el concepto de centro de masas.
Consideremos un conjunto de partículas de masas $\{m_i\}$ situadas en las posiciones $\{\vec{r}_i\}$. Se define el centro de masas del sistema como el punto cuya posición está dada por

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i,}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema.

Comentario

En un conjunto continuo de partículas de volumen V y densidad ρ, la posición del centro de masas se define como

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho \vec{r} dV$$

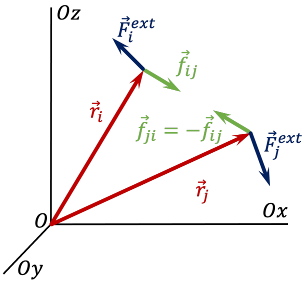
La velocidad y aceleración del centro de masas son, respectivamente,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{f}_i, \quad (2)$$

donde $\vec{f}_i$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula $i-$ésima del sistema.

Centro de masas



En general, sobre cada partícula i del sistema actúan fuerzas externas al sistema (como, por ejemplo, el peso) y fuerzas internas, debidas a la interacción entre pares de partículas del mismo. Entonces

$$\sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_i^{ext} + \sum_i \vec{f}_i^{int},$$

y el último sumando es nulo, en virtud de la tercera ley de Newton. Entonces

$$\sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_i^{ext} = \vec{F}_{ext},$$

donde $\vec{F}_{ext}$ es la fuerza total externa que actúa sobre el sistema. Sustituyendo en (2):

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext}}$$

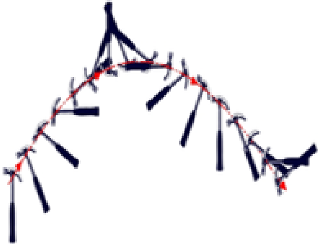
Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

El centro de masas de un sistema se comporta como si en él estuviera concentrada toda la masa del mismo, y sobre él actuara únicamente la fuerza externa al sistema.

El movimiento de un sistema de partículas siempre se puede descomponer en el movimiento de su centro de masas, sometido únicamente a la fuerza externa, más el movimiento del resto del sistema relativo al centro de masas:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Movimiento completo} = \text{Movimiento del CM} + \\ + \text{ Movimiento del resto del sistema relativo al CM}\end{array}}$$

Centro de masas



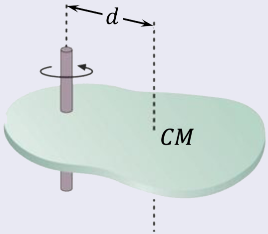
Teorema de los ejes paralelos

Teorema de Steiner

Dado el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masas, I_{CM}, el momento de inercia referido a un eje paralelo separado una distancia d de él está dado por

$$I = I_{CM} + md^2,$$

donde m es la masa del objeto que rota.



Ejemplo 2

Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L está orientada según el eje OX. Determinar el momento de inercia de la barra con respecto al extremo de la barra, suponiendo que se encuentra en el origen.

El momento de inercia de la varilla con respecto a su centro de masas, situado en el centro de la misma, es $I_{CM} = \frac{1}{12}mL^2$. El extremo de la varilla, por otra parte, dista $d = \frac{L}{2}$ del eje que pasa por el centro de masas. Entonces, según el teorema de Steiner,

$$I = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Rotaciones sin deslizamiento

Consideremos una cuerda enrollada en torno a una rueda o un cilindro que rota con velocidad angular ω. Si la cuerda está tensa y no desliza, su velocidad lineal v_L verifica

$$\boxed{v_L = R\omega,}$$

y, por tanto, su aceleración está relacionada con la aceleración angular de la polea:

$$\boxed{a_L = R\alpha}$$

Ejemplo 3

Se sujeta un objeto de masa m a una cuerda de masa despreciable enrollada alrededor de una rueda de polea de momento de inercia I y radio R. La polea puede girar sin rozamiento, y la cuerda no desliza por su garganta. La polea parte del reposo, y empieza a rotar cuando el objeto desciende y la cuerda se desenrolla. Calcular la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo que cae.

El cuerpo cae debido a la acción de la gravedad; por otra parte, la rotación de la polea se debe al momento de la tensión de la cuerda. Entonces

$$mg - T = ma \qquad TR = I\alpha = I\frac{a}{R},$$

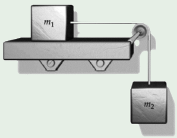
de donde resulta

$$\boxed{T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}} \qquad \boxed{a = \frac{g}{1 + I/mR^2}}$$

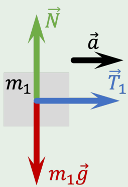
Rotaciones sin deslizamiento

Ejemplo 4

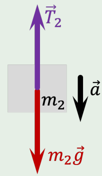
Dos bloques están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque de masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento; el bloque de masa m_2 está suspendido de la cuerda. Determinar la aceleración de los bloques y las tensiones en las cuerdas, suponiendo que la cuerda no desliza por la polea.



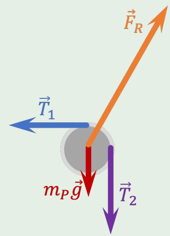
Consideremos las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:



$$m_1 g - N = 0$$
$$T_1 = m_1 a$$



$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$



$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$
$$a = \alpha R$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 R^2}{I + (m_1 + m_2)R^2} g}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{m_2 R^2}{I + (m_1 + m_2)R^2} m_1 g}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{I + m_1 R^2}{I + (m_1 + m_2)R^2} m_2 g}$$

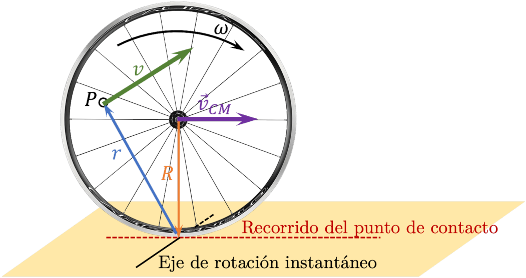
Rodadura sin deslizamiento

Un cuerpo que rueda experimenta una traslación y una rotación simultáneamente.

Comentario

La rodadura se debe a la existencia de fuerzas de rozamiento. Sin embargo, si no hay deslizamiento,

$$f_r \neq \mu N$$



El movimiento de rodadura sin deslizamiento tiene dos características básicas:

- El cuerpo rueda en torno a un eje que pasa por el punto de contacto, que está instantáneamente en reposo.
- El centro de masas del sistema se encuentra siempre encima del punto de contacto.

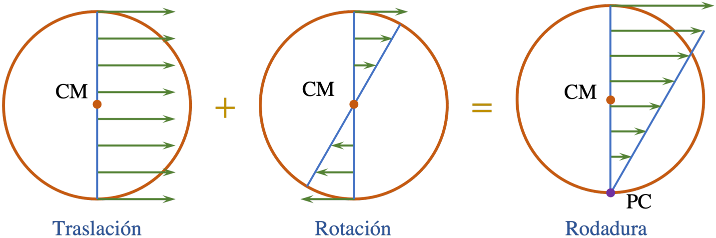
Un punto P del objeto rodante se mueve entonces a una velocidad

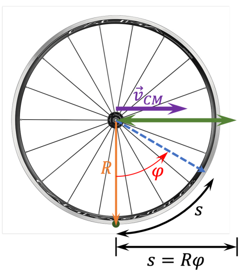
$$v = r\omega,$$

donde r es la distancia al punto de contacto.

Rodadura sin deslizamiento

El movimiento de rodadura se puede descomponer en un movimiento de traslación del centro de masas y una rotación con respecto a un eje que pasa por él





Según la figura, el desplazamiento del punto de contacto es

$$s = R\varphi,$$

y coincide con el del centro de masas. La relación entre la traslación del CM y la rotación es entonces

$$\boxed{v_{CM} = R\omega} \qquad \boxed{a_{CM} = R\alpha}$$

La energía cinética del objeto rodante es

$$\boxed{K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2,}$$

donde I_{CM} es el momento de inercia referido al centro de masas del sistema.

Rodadura sin deslizamiento

Ejemplo 5

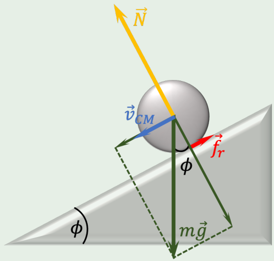
Una bola maciza uniforme de masa m y radio R rueda hacia abajo sin deslizarse por un plano inclinado un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Determinar la aceleración del centro de masas de la bola y la fuerza de rozamiento que actúa sobre ella.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que cae se representan en la figura; la que produce la rodadura es la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$. La traslación del CM está descrita por la la segunda ley de Newton,

$$mg\sin\phi - f_r = ma,$$

donde a es la aceleración del CM. Por otra parte, para la rotación en torno al CM, se verifica,

$$f_r R = I\alpha = I\frac{a}{R},$$



donde I es el momento de inercia de la bola referido al CM. De estas dos ecuaciones resulta

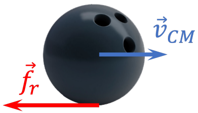
$$\boxed{a = \frac{g\sin\phi}{1 + I/(MR^2)} = \frac{5}{7}g\sin\phi}$$

$$\boxed{f_r = \frac{mg\sin\phi}{1 + MR^2/I} = \frac{2}{7}mg\sin\phi}$$

Rodadura con deslizamiento

Cuando un objeto se desliza mientras rueda, la condición $v_{CM} = R\omega$ ya no se cumple.

Si $v_{CM} > R\omega$, como cuando se deja caer una bola rueda por un plano inclinado con rozamiento, la fuerza de rozamiento tiende a disminuir v_{CM}, mientras que su momento tiende a aumentar ω. Al cabo de un cierto tiempo, se cumple la condición de igualdad; a partir de ese momento, el cuerpo rueda sin deslizar.



Ejemplo 6

Una bola de masa M y radio R se lanza de modo que, cuando toca el suelo, se mueve horizontalmente con velocidad $v_0 = 5$ m/s y no rueda. El coeficiente de rozamiento cinético entre el suelo y la bola es $\mu_c = 0.08$. Calcular el tiempo durante el cual la bola se desliza.

La única fuerza que actúa sobre la bola en la dirección en que se desplaza es la fuerza de rozamiento cinético. Entonces

$$-f_r = ma \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{f_r}{m} = -\mu_c g,$$

y la velocidad de traslación varía como

$$v_{CM}(t) = v_0 - \mu_c g t$$

Por otra parte, para la rotación se verifica $f_r R = I\alpha$, de manera que la velocidad angular es

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = \frac{f_r R}{I} t$$

La condición de rodadura sin deslizamiento se verifica cuando $v_{CM}(t) = \omega(t) R$, de donde

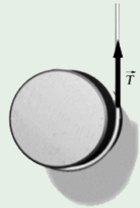
$$\boxed{t = \frac{v_0}{\mu_c g \left(1 + mR^2/I\right)} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_c g} = 1.8 \text{ s}}$$

Problemas

Problema 1

Un cilindro uniforme de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda fuertemente sujeta. El cilindro cae verticalmente, como se indica en la figura.

- Demostrar que la aceleración del cilindro está dirigida hacia abajo, y que su módulo es $a = 2g/3$.
- Calcular la tensión de la cuerda. $\left(\text{Sol.: } T = \frac{1}{3}mg\right)$.



Problema 2

En la cubierta de un pozo hay un torno cuyo tambor, con forma de disco, tiene masa m_t y radio R. Alrededor del tambor se enrolla un cable de masa m_c y longitud L, de donde cuelga un cubo de agua de masa m_b. El cubo empieza a caer cuando se encuentra unido a la polea, desenrollando el cable. Calcular la velocidad a la que se mueve el cubo cuando ha caído una distancia $d < L$. $\left(\text{Sol.: } v = \sqrt{\frac{2m_b L + m_c d}{(\frac{1}{2}m_t + m_b + m_c)L} gd}\right)$.

Problema 3

Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una distancia d por encima de su centro. Determinar el valor de d para el que la bola de billar rueda sin deslizamiento desde el comienzo. Expresar la respuesta en función del radio de la bola $\left(\text{Sol.: } d = \frac{2}{5}R\right)$.