Física II

Relación 6: Estructura nuclear

Juan J. Meléndez

Problema 6.1

¿Cuáles de los siguientes nucleidos son isótopos, isótonos o isobaros entre sí: ${}^{4}_{2}\mathrm{X}$, ${}^{3}_{1}\mathrm{X}$, ${}^{3}_{2}\mathrm{X}$, ${}^{112}_{52}\mathrm{X}$, ${}^{40}_{19}\mathrm{X}$, ${}^{40}_{20}\mathrm{X}$, ${}^{124}_{52}\mathrm{X}$, ${}^{14}_{6}\mathrm{X}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{X}$, ${}^{126}_{54}\mathrm{X}$.

Los núclidos que tienen el mismo número atómico y distinto número másico se llaman *isótopos*. Los que tienen el mismo número de neutrones, pero distintos números atómico y másico, se llaman *isótonos*, y los que tienen el mismo número másico y distinto número atómico se llaman *isóbaros*. En nuestro caso, por tanto, los distintos isótopos, isótonos e isóbaros son los siguientes:

Isótopos

- ${}^{4}_{2}\mathrm{X}$ y ${}^{3}_{2}\mathrm{X}$, $(Z=2)$;
- ${}^{112}_{52}\mathrm{X}$ y ${}^{124}_{52}\mathrm{X}$, $(Z=52)$.

Isótonos

- ${}^{4}_{2}\mathrm{X}$ y ${}^{3}_{1}\mathrm{X}$, $(N=2)$;
- ${}^{14}_{6}\mathrm{X}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{X}$, $(N=8)$;
- ${}^{124}_{52}\mathrm{X}$ y ${}^{126}_{54}\mathrm{X}$, $(N=72)$.

Isóbaros

- ${}^{3}_{1}\mathrm{X}$ y ${}^{3}_{2}\mathrm{X}$, $(A=2)$;
- ${}^{40}_{19}\mathrm{X}$ y ${}^{40}_{20}\mathrm{X}$, $(A=40)$.

Problema 6.2

Determinar la relación aproximada entre los radios nucleares del ${}^{7}\mathrm{Li}$ y el ${}^{238}\mathrm{U}$.

En términos generales, el radio de un núcleo depende del número másico como

$$R \approx R_0 A^{1/3}, \tag{1}$$

donde $R_0 \approx 1.2$ fm. Entonces, para el ${}^{7}\mathrm{Li}$ y el ${}^{238}\mathrm{U}$ se verifica

$$R(\mathrm{Li}) \approx R_0 A(\mathrm{Li})^{1/3}$$

y

$$R(\mathrm{U}) \approx R_0 A(\mathrm{U})^{1/3},$$

de modo que

$$\boxed{\frac{R(\mathrm{Li})}{R(\mathrm{U})} \approx \left(\frac{A(\mathrm{Li})}{A(\mathrm{U})}\right)^{1/3} \approx 0.309}$$

Problema 6.3

Suponiendo que el átomo de hidrógeno es una esfera de radio igual al de Bohr, a_0, calcular, aproximadamente, la relación entre las densidades atómica y nuclear para el átomo de hidrógeno.

Aceptando que el átomo de hidrógeno es una esfera de radio a_0, su densidad es, por definición,

$$\rho_{\text{atómica}} = \frac{m_{\text{átomo}}}{V_{\text{átomo}}} = \frac{m_p + m_e}{\frac{4}{3}\pi a_0^3} = \frac{3}{4}\frac{m_p + m_e}{\pi a_0^3},$$

donde m_p y m_e son, respectivamente, las masas del protón y del electrón. La densidad nuclear, por otra parte, es

$$\rho_{\text{nuclear}} = \frac{m_p}{V_{\text{núcleo}}} = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{m_p}{\pi R_0^3 A},$$

donde $A = 1$ para el hidrógeno y hemos tenido en cuenta la relación (1). El cociente entre ambas densidades es entonces

$$\frac{\rho_{\text{atómica}}}{\rho_{\text{nuclear}}} = \frac{(m_p + m_e)AR_0^3}{m_p a_0^3} = \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) A \left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3$$

Tomando los valores $a_0 = 0.529$ Å $= 5.29 \cdot 10^{-11}$ m y $R_0 = 1.3$ fm $= 1.3 \cdot 10^{-15}$ m, resulta

$$\boxed{\frac{\rho_{\text{atómica}}}{\rho_{\text{nuclear}}} = 1.48 \cdot 10^{-11}}$$

Problema 6.4

Calcular la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para los siguientes núcleos:

a) ${}^2_1$H;

b) ${}^4_2$He;

c) ${}^{40}_{20}$Ca;

d) ${}^{63}_{29}$Cu;

e) ${}^{238}_{92}$U.

Por definición, la energía de enlace de un núcleo ${}^A_Z$X es

$$E_b = \left[\sum_{\text{nucleones}} m_i - m_{\text{núcleo}}\right] c^2 = E_b = [Zm_p + (A-Z)m_n - M_N(A,Z)]c^2,$$

donde $m_{\text{núcleo}}$, m_p y m_n denotan las masas del núcleo, del protón y del neutrón, respectivamente. Una expresión aproximada, más fácil de evaluar, es

$$E_b = [ZM_{\text{H}} + (A-Z)m_n - M_A]c^2, \tag{2}$$

donde M_{H} es la masa del átomo de hidrógeno y M_A es la masa atómica del elemento.

a) Para el ${}^2_1$H, que tiene un protón ($Z = 1$) y un neutrón ($A = 2$), la energía de enlace es

$$E_b\left({}^2_1\text{H}\right) = \left[M_{\text{H}} + m_n - M({}^2\text{H})\right]c^2 = 0.002388c^2 \ (\text{u}\cdot\text{c}^2)$$

esto es, teniendo en cuenta la conversión 1 u $=$ 931.5 MeV/c^2,

$$\boxed{E_b({}^2_1\text{H}) = 2.224 \text{ MeV}}$$

La energía de enlace por nucleón es, por su parte,

$$\boxed{\frac{E_b({}^2_1\text{H})}{A} = 1.11 \text{ MeV}}$$

b) Para el ^4_2He es $Z = 2$ y $A = 4$, de manera que

$$\boxed{E_b\left({}^4_2\text{He}\right) = \left[2M_\text{H} + 2m_n - M({}^4\text{He})\right]c^2 = 28.3\text{ MeV}}$$

y

$$\boxed{\frac{E_b({}^4_2\text{He})}{A} = 7.08\text{ MeV}}$$

c) Para el $^{40}_{20}\text{Ca}$ se tiene $Z = 20$ y $A = 40$, con lo que

$$\boxed{E_b\left({}^{40}_{20}\text{Ca}\right) = \left[20M_\text{H} + 20m_n - M({}^{40}\text{Ca})\right]c^2 = 342.0\text{ MeV}}$$

y

$$\boxed{\frac{E_b\left({}^{40}_{20}\text{Ca}\right)}{A} = 8.55\text{ MeV}}$$

d) Para el $^{63}_{29}\text{Cu}$ es $Z = 29$ y $A = 63$, de manera que

$$\boxed{E_b\left({}^{63}_{29}\text{Cu}\right) = \left[29M_\text{H} + 34m_n - M({}^{63}\text{Cu})\right]c^2 = 551.4\text{ MeV}}$$

y

$$\boxed{\frac{E_b\left({}^{63}_{29}\text{Cu}\right)}{A} = 8.75\text{ MeV}}$$

e) Finalmente, el $^{238}_{92}\text{U}$ tiene $Z = 92$ y $A = 238$, con lo que

$$\boxed{E_b\left({}^{238}_{92}\text{U}\right) = \left[92M_\text{H} + 146m_n - M({}^{238}\text{U})\right]c^2 = 1801.7\text{ MeV}}$$

y

$$\boxed{\frac{E_b\left({}^{238}_{92}\text{U}\right)}{A} = 7.57\text{ MeV}}$$

Problema 6.5

a) Determinar la masa nuclear del ^{63}Cu si su energía de enlace nuclear por nucleón es 8.752381 MeV.

b) Suponiendo que el ^{63}Cu se forma a partir del agregado de cada uno de sus nucleones, ¿qué pérdida de masa tiene lugar en el proceso?

a) Utilizando la definición alternativa para la energía de enlace, dada por (2), resulta

$$Zm_\text{H} + (A - Z)m_n - M_A = \frac{E_b}{c^2},$$

de donde

$$M_A = Zm_\text{H} + (A - Z)m_n - \frac{E_b}{c^2}$$

En nuestro caso, para el ^{63}Cu, que tiene $A = 63$ y $Z = 29$, es

$$E_b\left({}^{63}\text{Cu}\right) = 551.400\text{ MeV}$$

de manera que

$$\boxed{M({}^{63}\text{Cu}) = Zm_\text{H} + (A - Z)m_n - \frac{E_b}{c^2} = 58618.909\text{ MeV/c}^2 = 62.9295\text{ u}}$$

b) La energía de enlace de un núclido se relaciona con la pérdida de masa Δm que conlleva su formación a través de

$$E_b = \Delta m c^2$$

En nuestro caso,

$$\boxed{\Delta m = \frac{E_b}{c^2} = 551.400\ \mathrm{MeV}/c^2 = 0.59195\ \mathrm{u}}$$

Problema 6.6

Completar las siguientes reacciones nucleares:

a) ${}^{27}\mathrm{Al}(p,n)?$;

b) ${}^{32}\mathrm{S}(\alpha,\gamma)?$;

c) ${}^{197}\mathrm{Au}({}^{12}\mathrm{C},?){}^{206}\mathrm{At}$;

d) ${}^{116}\mathrm{Sn}(?,p){}^{117}\mathrm{Sn}$.

a) La primera reacción requiere bombardeo con un protón, y produce la emisión de un neutrón, de manera que el número atómico del elemento de partida aumenta en una unidad, y su número másico no cambia. Así pues, la reacción correspondiente es

$$\boxed{{}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{27}_{14}\mathrm{Si} + {}^{1}_{0}n}$$

o bien, de forma equivalente,

$$\boxed{{}^{27}\mathrm{Al}(p,n){}^{27}\mathrm{Si}}$$

b) En este caso, la reacción requiere una partícula α (núcleo de He), que conlleva aumentar A en cuatro unidades y Z en dos unidades; el núcleo resultante, por tanto, es el ${}^{36}\mathrm{Ar}$. Además, produce la emisión de un fotón, que no cambia los números másico y atómico. La reacción correspondiente es

$${}^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{36}_{18}\mathrm{Ar} + {}^{0}_{0}\gamma,$$

o bien

$$\boxed{{}^{32}\mathrm{S}(\alpha,\gamma){}^{36}\mathrm{Ar}}$$

c) En este caso, el núcleo de ${}^{197}\mathrm{Au}$ es bombardeado con un núcleo de ${}^{12}\mathrm{C}$, lo que debería dar lugar a un núclido de número másico $A = 209$. Sin embargo, el núcleo resultante es el ${}^{206}\mathrm{At}$, que tiene número másico 206. Por tanto, en la reacción debe emitirse una partícula con número másico 3. Por otra parte, los números atómicos del Au y del At son 79 y 85, respectivamente, y su diferencia coincide con el número atómico del átomo de C. Así pues, en la reacción del apartado no se emiten partículas cargadas, pero sí masivas. La única posibilidad, por tanto, es que se emitan tres neutrones, con lo que la reacción es

$${}^{197}_{79}\mathrm{Au} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{206}_{85}\mathrm{Ar} + 3\,{}^{1}_{0}n$$

es decir,

$$\boxed{{}^{197}\mathrm{Au}({}^{12}\mathrm{C},3n){}^{206}\mathrm{At}}$$

d) Finalmente, en la reacción de este apartado no cambia el número atómico, aunque el número másico disminuye en una unidad. Como la reacción produce un protón, la partícula incidente tiene que tener $Z = 1$ y $A = 2$, esto es, un núcleo de deuterio. La reacción es entonces

$$^{116}_{50}\mathrm{Sn} + \,^{2}_{1}\mathrm{H} \to \,^{117}_{50}\mathrm{Sn} + \,1_1 p$$

es decir,

$$\boxed{^{116}\mathrm{Sn}(d,p)^{117}\mathrm{Sn}}$$

Problema 6.7

El balance energético de la reacción $^{9}\mathrm{Be}(p,d)^{8}\mathrm{Be}$ es 559.5 keV. Teniendo en cuenta que $m(^{9}\mathrm{Be}) = 9.012182$ u, calcular la masa del ^{8}Be.

La energía puesta en juego en la reacción es

$$Q = \left[m(^{9}\mathrm{Be}) + m_p - m(^{8}\mathrm{Be}) - m(^{2}\mathrm{H})\right] c^2 \approx \left[m(^{9}\mathrm{Be}) + m(^{1}\mathrm{H}) - m(^{8}\mathrm{Be}) - m(^{2}\mathrm{H})\right] c^2,$$

de donde

$$m(^{8}\mathrm{Be}) = m(^{9}\mathrm{Be}) + m(^{1}\mathrm{H}) - m(^{2}\mathrm{H}) - \frac{Q}{c^2}$$

Numéricamente,

$$\boxed{m(^{8}\mathrm{Be}) = 7456.94\ \mathrm{MeV/c^2} = 8.005304\ \mathrm{u}}$$

Problema 6.8

a) Completar la reacción $^{9}\mathrm{Be}(\alpha,n)$ y determinar si es exotérmica o endotérmica.

b) *Ídem* para la reacción $^{10}\mathrm{B}(\alpha,p)$.

a) El berilio tiene $Z = 4$ y, además, el neutrón no tiene carga eléctrica ($Z = 0$), de manera que el bombardeo con partículas α produce un núcleo de Z =6, es decir, de carbono. Por otra parte, los números másicos para el núcleo de berilio y la partícula α son 9 y 4, respectivamente, de modo que, teniendo en cuenta que $A = 1$ para un neutrón, el núcleo resultante debe tener $A = 12$. La reacción es entonces

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + \,^{4}_{2}\mathrm{He} \to \,^{12}_{6}\mathrm{C} + \,^{1}_{0}n$$

La energía puesta en juego en la reacción es, por definición,

$$Q = \left[m(^{9}\mathrm{Be}) + m(^{4}\mathrm{He}) - m(^{12}\mathrm{C}) - m_n\right] c^2,$$

donde los distintos valores están tabulados. Entonces

$$\boxed{Q = -4.685\ \mathrm{MeV},}$$

de manera que la reacción es endotérmica.

b) En este caso, el bombardeo del núcleo ^{10}B con partículas α produce un protón más un núclido que debe tener $A = 13$. Además, teniendo en cuenta que el protón tiene $Z = 1$ y la partícula α tiene $Z = 2$, el número atómico del elemento tiene que ser una unidad mayor que el del boro. El elemento producido es, por tanto, el carbono. La reacción es, por tanto,

$$^{10}\mathrm{B} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{13}\mathrm{C} + {}^1_1p$$

y el factor Q es

$$\boxed{Q = \left[{}^{10}\mathrm{B} + {}^4\,\mathrm{He} - m({}^{13}\mathrm{C}) - m({}^1\mathrm{H})\right] c^2 = 4.061\ \mathrm{MeV},}$$

de manera que esta reacción es exotérmica.

Problema 6.9

La actividad de un radionúclido decrece un 30 % en una semana. Calcular su constante radiactiva, su periodo y su vida media.

La actividad de un radionúclido varía con el tiempo como

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

donde λ se llama constante radiactiva y A_0 es la actividad en el instante inicial. En nuestro caso, si la actividad se ha reducido en un 30 % en una semana, entonces

$$A(\bar{t}) = 0.7 A_0 = A_0 e^{-\lambda \bar{t}},$$

donde $\bar{t} = 1$ semana $= 604800$ s. De aquí,

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln 0.7}{\bar{t}} = 5.897 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}}$$

Por otra parte, el periodo τ verifica

$$A(\tau) = A_0 e^{-\lambda \tau} \equiv \frac{A_0}{e},$$

de donde

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = 1.696 \cdot 10^6\ \mathrm{s}}$$

Finalmente, la vida media $T_{1/2}$ verifica

$$A(T_{1/2}) = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \equiv \frac{A_0}{2},$$

de donde

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 = 1.175 \cdot 10^6\ \mathrm{s}}$$

Problema 6.10

a) Calcular la actividad específica del ^{14}C, cuyo período es de 5730 años.

b) Calcular la masa de una muestra de ^{14}C que tiene una actividad de 20 Ci.

Se denomina *actividad específica* a la actividad por unidad de masa de una muestra:

$$A_e(t) = \frac{A(t)}{M} = \frac{\lambda N(t)}{M}, \tag{4}$$

donde $N(t)$ es el número de partículas en la masa M del elemento. Para calcular este número, tengamos en cuenta que el número másico de un elemento corresponde a la masa de un mol (es decir, de un número de Avogadro de partículas) de ese elemento. Entonces

$$\frac{N(t)}{M} = \frac{N_A}{M_{\text{mol}}} = \frac{N_A}{M_{\text{atómica}}}$$

que, sustituida en (4), da finalmente

$$A_e = \lambda \frac{N_A}{M_{\text{atómica}}} = \frac{1}{\tau}\frac{N_A}{M_{\text{atómica}}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{N_A}{M_{\text{atómica}}}$$

a) El ^{14}C tiene un periodo de desintegración de 5730 años. Teniendo en cuenta que su peso atómico es 12.0107 gr/mol, la actividad específica es

$$\boxed{A_E = \frac{\ln 2}{1.808 \cdot 10^{11}\ \text{s}}\frac{6.023 \cdot 10^{23}\ 1/\text{mol}}{12.0107\ \text{gr/mol}} = 1.92 \cdot 10^{11}\ \text{Bq/g} = 5.195\ \text{Ci/g}}$$

b) Si la actividad total de la muestra es de 20 Ci, la masa de la misma es

$$M = \frac{A(t)}{A_E}$$

esto es, teniendo en cuenta el apartado anterior,

$$\boxed{M = 3.85\ \text{g}}$$

Problema 6.11

La actividad de una muestra, cuyo periodo es de 7.5 minutos, fue medida desde las 10:03 hasta las 10:13 horas. El número total de cuentas obtenidas en el detector durante ese tiempo fue de 34650. Calcular la actividad de la muestra, en cuentas por minuto, a las 10:00 horas.

Consideremos que $t = 0$ a las 10:00 horas, y llamemos N_0 y A_0 al número de partículas y la actividad de la muestra en ese instante. A partir de las 10:00, la muestra empieza a descomponerse, según la ley (3), de manera que en los instantes $t_1 = 3$ min (10:03 horas) y $t_2 = 10$ min (10:13 horas), la muestra tiene unos números de partículas dados por

$$N(t_1) = N_0 e^{-\lambda t_1}$$

y
$$N(t_2) = N_0 e^{-\lambda t_2},$$
respectivamente. El número de cuentas detectadas en ese intervalo de tiempo es entonces
$$\Delta N = N(t_1) - N(t_2) = N_0 \left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}\right),$$
de donde
$$N_0 = \frac{\Delta N}{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}}$$
y, por tanto,
$$A_0 = \lambda N_0 = \frac{\lambda \Delta N}{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}},$$
donde $\lambda = \frac{1}{\tau}$. Numéricamente, resulta
$$\boxed{A_0 = 11359.085 \text{ min}^{-1}}$$

Problema 6.12

La masa promedio del potasio en el ser humano es de 140 g. Teniendo en cuenta que el ^{40}K tiene una abundancia de 0.0118 % y un periodo de $1.28{\cdot}10^9$ años, estimar la radiactividad emitida por una persona debido al potasio que contiene su cuerpo.

Según el enunciado, el número promedio de núcleos de potasio en el ser humano es
$$N_T = n_{\text{moles}} N_A = \frac{m_{\text{K}}}{P_A(K)} N_A,$$
donde $m_{\text{K}} = 140$ g y $P_A(K)$ denota el peso atómico del potasio. De ellos, solo una fracción f corresponden a ^{40}K radiactivo, de manera que el número de atomos de este isótopo es
$$N = f N_T = \frac{m_{\text{K}}}{P_A(K)} f N_A,$$
con $f = 0.0118\,\%$, y su actividad es
$$A = \lambda N = \frac{1}{\tau} \frac{m_{\text{K}}}{P_A(K)} f N_A,$$
donde $\tau = 1.28{\cdot}10^9$ años $= 4.039{\cdot}10^{16}$ s. Numéricamente, el resultado es
$$\boxed{A = 6300.73 \text{ Bq}}$$

Problema 6.13

La actividad del carbono en seres vivos es de 0.007 μCi/kg debido a la presencia del ^{14}C. El carbón proveniente de un fogón situado en un campamento indio tiene una actividad de 0.0048 μCi/kg. Teniendo en cuenta que la vida media del ^{14}C es de 5730 años, calcular el año en que ese campamento estuvo habitado.

La actividad varía con el tiempo según la ley (3). Supongamos que $t = 0$ en el instante en que se apaga el fuego, cuando la actividad del ^{14}C es A_0. En ese instante, el núclido radiactivo empieza a emitir de manera que, en un cierto instante $\bar{t}$ posterior, la actividad es $A(\bar{t})$. Entonces

$$A(\bar{t}) = A_0 e^{-\lambda \bar{t}},$$

de donde

$$\bar{t} = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{A(\bar{t})}{A_0} = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A(\bar{t})}{A_0}$$

En nuestro caso, con $A_0 = 0.007$ μCi/kg, $A(\bar{t}) = 0.0048$ μCi/kg y $T_{1/2} = 5730$ años, resulta

$$\bar{t} = 3119 \text{ años}$$

contados desde el año actual. En consecuencia, el fuego se apagó en el año 1098 aC.

Problema 6.14

Un objeto de madera de 50 g de masa tiene una actividad de cinco desintegraciones por segundo de ^{14}C. Sabiendo que las plantas vivas tienen una actividad de 12 dpm por gramo, y que el periodo del ^{14}C es de 5730 años, calcular la edad de la pieza de madera.

La actividad específica de la pieza de madera es

$$A_E = \frac{A}{M}$$

y varía con el tiempo según la ley (3), de manera que, en un instante $\bar{t}$,

$$A_E(\bar{t}) = A_E(0) e^{-\lambda \bar{t}}$$

De aquí,

$$\bar{t} = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_E(\bar{t})}{A_E(0)} = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A_E(\bar{t})}{A_E(0)},$$

cuyo valor numérico es

$$\boxed{\bar{t} = 5730 \text{ años}}$$