Física II

Relación 4: Orígenes de la Mecánica Cuántica

Juan J. Meléndez

Problema 4.1

En la década de 1960, los astrónomos detectaron una radiación de cuerpo negro con un pico de Wien a 1.06 mm, que aparentemente provenía de todos los puntos del espacio. Esta radiación cósmica de fondo de microondas es clave para comprender la evolución del Universo, porque constituye una prueba de la existencia del *Big Bang*. Calcular la temperatura de la fuente de radiación de fondo.

La temperatura a la que se encuentra un cuerpo negro y la longitud de onda a la que emite el máximo de radiación están relacionadas a través de la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{C}{T},$$

donde $C = 2.899$ mm·K es una constante. En nuestro caso,

$$\boxed{T = \frac{C}{\lambda_{\text{máx}}} = 2.73\ \text{K}}$$

Problema 4.2

Un cuerpo negro a 800 K emite 450 W de potencia de radiación. Calcular a qué temperatura se duplica la potencia radiada.

Supongamos que, a una temperatura T, el cuerpo negro emite una cierta potencia de radiación P_r. Ambas cantidades están relacionadas a través de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P_r = \sigma A T^4,$$

donde $\sigma = 5.6703{\cdot}10^{-8}\ \text{W}{\cdot}\text{m}^{-2}{\cdot}\text{K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann, A es el área del objeto y T su temperatura. La temperatura a la que se duplica la potencia de radiación, que denotaremos como T', verifica entonces

$$2P_r = 2\sigma A T^4 = \sigma A T'^4,$$

de donde

$$T' = \sqrt[4]{2}T$$

En nuestro caso, numéricamente,

$$\boxed{T' = 951.4\ \text{K}}$$

Problema 4.3

El Sol se puede considerar un cuerpo negro esférico de $7{\cdot}10^8$ m de radio. La intensidad por unidad de superficie de la radiación solar que incide sobre la Tierra, que está a $1.5{\cdot}10^{11}$ m del Sol, es de $1.4{\cdot}10^3\ \text{W/m}^2$. Suponiendo que no existe atenuación en el espacio, calcular la temperatura y la densidad de radiación en la superficie del Sol.

La potencia emitida por un cuerpo negro se relaciona con su temperatura a través de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P_r = e\sigma A T^4,$$

donde $e = 1$ para un cuerpo negro, A es su área y σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Si la radiación que emite el Sol llega sin atenuación a la superficie de la Tierra, la intensidad que incide sobre ésta es

$$P_r = 4\pi r^2 \rho_r, \tag{1}$$

donde r es la distancia de la Tierra al Sol y ρ_r es la intensidad emitida por unidad de área. La temperatura a la que se encuentra la superficie del Sol es entonces

$$T = \left(\frac{P_r}{e\sigma A}\right)^{1/4} = \left(\frac{4\pi r^2 \rho_r}{\sigma 4\pi R_\odot^2}\right)^{1/4},$$

donde $R_\odot$ es el radio del Sol. Numéricamente,

$$\boxed{T = 5802 \text{ K}}$$

Por otra parte, si suponemos que la radiación emitida por el Sol no se atenúa en el espacio, la intensidad que incide sobre la Tierra, dada por (1) debe ser igual a la emitida por el Sol, que está dada por

$$P_r = 4\pi R_\odot^2 \rho_\odot,$$

donde $\rho_\odot$ es la densidad de radiación en la superficie del Sol. Entonces

$$4\pi r^2 \rho_r = 4\pi R_\odot^2 \rho_\odot,$$

de donde

$$\rho_\odot = \rho_r \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2$$

Numéricamente,

$$\boxed{\rho_\odot = 6.5 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2}$$

Problema 4.4

Una estrella azul supergigante tiene una temperatura superficial de 30 kK, y emite una potencia total que es 100000 veces la del Sol.

a) Calcular la longitud de onda del pico de Wien de esta estrella.

b) Si el radio del Sol es $6.96{\cdot}10^8$ m y su temperatura 5500 K, calcular el radio de la estrella supergigante.

a) La longitud de onda del máximo de radiación está dada, en virtud de la ley de Wien, por

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{C}{T},$$

esto es,

$$\boxed{\lambda_{\text{máx}} = 9.66 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = 96.6 \text{ nm},}$$

de manera que la estrella azul emite, de hecho, en el rango ultravioleta del espectro.

b) La potencia total irradiada por la estrella, suponiendo que se comporta como un cuerpo negro perfecto, está dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P_r = e\sigma A T^4,$$

donde $e = 1$, σ es la constante de Stefan-Boltzmann, T es la temperatura de la estrella y A es su superficie. Teniendo en cuenta que esta potencia es 100000 veces superior a la del Sol, y suponiendo que éste se comporta también como un cuerpo negro, resulta

$$P_r = e\sigma A T^4 = 100000 e\sigma A_\odot T_\odot^4,$$

donde las magnitudes con el subíndice "$\odot$" se refieren al Sol. Entonces

$$4\pi R^2 T^4 = 100000 \cdot 4\pi R_\odot^2 T_\odot^4,$$

de donde

$$R = \sqrt{100000}\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 R_\odot$$

Numéricamente,

$$\boxed{R = 7.39 \cdot 10^9 \text{ m} = 10.63 R_\odot}$$

Problema 4.5

Se define la *densidad de fotones* de un haz como el número de fotones que atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección del haz por unidad de tiempo. La longitud de onda de la luz roja emitida por un láser He-Ne de 3.00 mW de potencia es 633 nm. Si el diámetro del haz del láser es de 1 mm, calcular la densidad de fotones del haz, suponiendo que la intensidad se distribuye uniformemente a través del haz.

Por definición, la potencia de un láser es igual a la energía emitida por el láser por unidad de tiempo. En términos de fotones, la potencia emitida por el haz es igual a la energía transportada por los fotones que contiene por unidad de tiempo. Si llamamos N al número de fotones que atraviesa el área A perpendicular al haz por unidad de tiempo, la potencia del haz es entonces

$$P = N\varepsilon = nA\varepsilon = \pi d^2 n\varepsilon, \tag{2}$$

donde d es el diámetro del haz, n su densidad de fotones y ε es la energía transportada por un fotón:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{3}$$

Sustituyendo en (2), resulta

$$P = n\frac{\pi d^2 hc}{\lambda},$$

de donde

$$n = \frac{P\lambda}{\pi d^2 hc},$$

cuyo valor numérico es

$$\boxed{n = 1.21 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}}$$

Problema 4.6

Cuando incide luz ultravioleta monocromática de 300 nm de longitud de onda sobre una muestra de potasio, los electrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2.03 eV. Calcular

a) la energía del fotón incidente;

b) la función trabajo en el potasio;

c) la energía cinética máxima de los electrones si la radiación incidente tuviese una longitud de onda de 430 nm;

d) la longitud de onda máxima de la radiación electromagnética para producir efecto fotoeléctrico en el potasio.

a) La energía del fotón incidente se relaciona con su longitud de onda a través de la expresión (3) de modo que, en nuestro caso,

$$\boxed{\varepsilon = 6.62 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4.13 \text{ eV}}$$

b) La energía cinética máxima de los fotoelectrones está relacionada con la energía de los fotones incidentes como

$$K_{\text{máx}} = h\nu - \phi_0,$$

donde ϕ_0 es la función trabajo del material. Entonces

$$\boxed{\phi_0 = h\nu - K_{\text{máx}} = 2.1 \text{ eV}}$$

c) La energía correspondiente a una radiación incidente de $\lambda' = 430$ nm de longitud de onda está dada por (3). Teniendo en cuenta el valor de la función trabajo calculado en el apartado anterior, la energía cinética máxima de los fotoelectrones es, en este caso,

$$\boxed{K'_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda'} - \phi_0 = 0.78 \text{ eV}}$$

d) La máxima longitud de onda de los fotones incidentes que producen efecto fotoeléctrico corresponde a la mínima energía posible del haz incidente. Esta energía, por su parte, corresponde a la situación en la que los fotoelectrones alcanzan el detector sin energía cinética adicional. La condición de mínima energía (o de máxima longitud de onda) para el haz es entonces

$$\varepsilon_{\text{mín}} - \phi_0 = \frac{hc}{\lambda_{\text{máx}}} - \phi_0 = 0,$$

de donde

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{hc}{\phi_0}$$

Numéricamente,

$$\boxed{\lambda_{\text{máx}} = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 590 \text{ nm}}$$

Problema 4.7

Al iluminar una superficie con radiación electromagnética de 780 nm de longitud de onda, se emiten electrones cuya energía cinética máxima es de 0.37 eV. Calcular la energía cinética máxima si la superficie se ilumina con radiación de 410 nm de longitud de onda.

Conocida la energía del haz incidente y la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos, la función trabajo para la superficie sobre la que inciden los fotones es

$$\phi_0 = h\nu_1 - K_{\text{máx},1} = \frac{hc}{\lambda_1} - K_{\text{máx},1} \tag{4}$$

donde $\lambda_1 = 780$ nm y $K_{\text{máx},1} = 0.37$ eV. Al iluminar la superficie con una longitud de onda $\lambda_2 =$410 nm, la energía cinética máxima de los fotoelectrones es

$$K_{\text{máx},2} = h\nu_2 - \phi_0 = \frac{hc}{\lambda_2} - \phi_0,$$

donde hemos tenido en cuenta que la función trabajo es característica de la superficie sobre la que incide el haz. Teniendo en cuenta (4) resulta entonces

$$K_{\text{máx},2} = K_{\text{máx},1} + hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

Numéricamente,

$$\boxed{K_{\text{máx},2} = 1.80 \text{ eV}}$$

Problema 4.8

Cuando una radiación de longitud de onda λ_1 incide sobre el cátodo de un tubo fotoeléctrico, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 1.8 eV. Si la longitud de onda se reduce a $\frac{1}{2}\lambda_1$, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 5.5 eV. Calcular la función de trabajo del material del cátodo.

La función trabajo es característica del material sobre el que incide la radiación. En el primer caso, si esta tiene longitud λ_1, se verifica

$$K_{\text{máx},1} = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi_0,$$

de manera que

$$\lambda_1 = \frac{hc}{K_{\text{máx},1} + \phi_0} \tag{5}$$

Para una longitud $\frac{1}{2}\lambda_1$,

$$K_{\text{máx},2} = \frac{2hc}{\lambda_1} - \phi_0,$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{2hc}{K_{\text{máx},2} + \phi_0} \tag{6}$$

Igualando (5) y (6) y despejando resulta entonces

$$\phi_0 = K_{\text{máx},2} - 2K_{\text{máx},1}$$

Numéricamente,

$$\boxed{\phi_0 = 1.9 \text{ eV}}$$

Problema 4.9

Hallar el desplazamiento de la longitud de onda de los fotones dispersados a $\theta = 60^{\text{o}}$ por electrones en reposo. Suponer que los electrones se mueven inicialmente con velocidad despreciable, y que están libres (es decir, no atrapados por átomos o moléculas).

Los electrones del enunciado, prácticamente estáticos y libres, se encuentran en situación de experimentar efecto Compton, de manera que la longitud de onda de los fotones dispersados según un ángulo θ es

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta), \tag{7}$$

donde λ es la longitud de la radiación incidente, m_e es la masa del electrón y c es la velocidad de la luz. El desplazamiento de longitud de onda es entonces

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

cuyo valor numérico es

$$\boxed{\Delta\lambda = 1.21 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1.21 \text{ pm}}$$

Problema 4.10

Compton utilizó fotones de 0.0711 nm de longitud de onda. Calcular

a) la energía de estos fotones;

b) la longitud de onda de los fotones dispersados en la dirección opuesta a la de los fotones incidentes;

c) la energía de un fotón dispersado en esa dirección.

a) La energía de los fotones incidentes está dada por (3). En nuestro caso,

$$\boxed{\varepsilon = 17434 \text{ eV} = 17.43 \text{ keV}}$$

b) Los fotones dispersados en dirección opuesta a la incidente (llamados fotones *retrodispersados*), emergen con un ángulo $\theta = \pi$. Teniendo en cuenta (7), la longitud de estos fotones es

$$\boxed{\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_e c} = 0.0759 \text{ nm}}$$

c) Teniendo en cuenta de nuevo (3), la energía de estos fotones es

$$\boxed{\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = 16335 \text{ eV} = 16.34 \text{ keV}}$$

Problema 4.11

Un microscopio electrónico utiliza electrones de 70 keV de energía cinética. Calcular la longitud de onda de estos electrones.

Según la relación de de Broglie, la longitud de onda que se asocia a una partícula de cantidad de movimiento p es

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{8}$$

Suponiendo que los electrones del microscopio son partículas clásicas, la cantidad de movimiento se relaciona con la energía cinética a través de

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

donde m es la masa en reposo del electrón. De aquí,

$$p = \sqrt{2mK}$$

y, sustituyendo en (8),

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mK}} = 4.63 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 4.63 \text{ pm}}$$

Si suponemos que el electrón del microscopio es relativista, la relación entre p y K es

$$K = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2,$$

de donde

$$p = \sqrt{\frac{K^2}{c^2} + 2mK} = 1.477 \cdot 10^{-22} \text{ kg·m/s}$$

y

$$\lambda = 4.48 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

En este caso, el cálculo relativista no es necesario. En efecto,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

de manera que

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = 1.42 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0.47c \ll c$$

Problema 4.12

La distancia entre los iones de Li^+ y Cl^- en un cristal de LiCl es 0.257 nm. Hallar la energía cinética de los electrones que tienen longitud de onda igual a esta distancia.

La energía cinética de una partícula de masa m es

$$K = \frac{p^2}{2m},$$

y, teniendo en cuenta la expresión (8), se relaciona con la longitud de onda de la partícula λ como

$$K = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

En nuestro caso, con $\lambda = 0.257$ nm, resulta

$$\boxed{K = 3.64 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 22.8 \text{ eV}}$$

Problema 4.13

Un electrón, un protón y una partícula α (que es un núcleo de He, de masa $6.64 \cdot 10^{-27}$ kg), tienen, cada uno de ellos, una energía cinética de 150 keV. Calcular

a) los módulos de sus cantidades de movimiento;

b) sus longitudes de onda de de Broglie.

a) La energía cinética de una partícula de masa m y su cantidad de movimiento están relacionadas como

$$K = \frac{p^2}{2m},$$

de donde

$$p = \sqrt{2mK}$$

Entonces, para el electrón, el protón y la partícula α resulta, respectivamente,

$$\boxed{p_e = \sqrt{2m_eK} = 2.09 \cdot 10^{-22} \text{ kg·m·s}^{-1}}$$

$$\boxed{p_p = \sqrt{2m_pK} = 8.97 \cdot 10^{-21} \text{ kg·m·s}^{-1}}$$

$$\boxed{p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha K} = 1.79 \cdot 10^{-20} \text{ kg·m·s}^{-1}}$$

b) La longitud de onda asociada a una partícula de momento p está dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{9}$$

En nuestro caso, para el electrón, protón y partícula α, las longitudes de onda respectivas son entonces

$$\boxed{\lambda_e = \frac{h}{p_e} = 3.17 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3.17 \text{ pm}}$$

$$\boxed{\lambda_p = \frac{h}{p_p} = 7.39 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 7.39 \cdot 10^{-2} \text{ pm}}$$

$$\boxed{\lambda_\alpha = \frac{h}{p_\alpha} = 3.70 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3.70 \cdot 10^{-2} \text{ pm}}$$

Problema 4.14

Si una pelota de béisbol de 142 g de masa se mueve a 25 m/s con una precisión de 1 μm, calcular la incertidumbre en su velocidad.

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que las imprecisiones en la medida de la posición y la cantidad de movimiento de una partícula están relacionadas mediante

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{10}$$

donde estamos suponiendo que la partícula se mueve en una dimensión. Aceptado que no existe incertidumbre en la masa de la partícula, (10) equivale a

$$m \Delta v_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

de manera que la incertidumbre en la velocidad de la partícula es, como mínimo,

$$\Delta v_x = \frac{\hbar}{2m\Delta x}$$

Numéricamente

$$\boxed{\Delta v_x = 3.71 \cdot 10^{-28} \text{ m/s},} \tag{11}$$

que indica que la incertidumbre en la velocidad de una pelota de béisbol es prácticamente despreciable.

Problema 4.15

Un electrón libre está confinado en una caja de 0.10 nm de lado. Calcular

a) la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón;

b) la energía del electrón, suponiendo que su cantidad de movimiento es igual al valor mínimo de la incertidumbre calculado en el apartado anterior;

c) la longitud de onda que tendría que tener un fotón para tener la misma energía.

a) Puesto que el electón está confinado en una caja de cierto tamaño, podemos suponer que su posición está definida con una incertidumbre igual al tamaño de esa caja. Teniendo en cuenta (10), la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón es entonces

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a},$$

donde a es el lado de la caja. Numéricamente,

$$\boxed{\Delta p_x = 5.27 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg{\cdot}m/s}} \tag{12}$$

b) Si el momento del electrón está dado por el valor (12), entonces su energía es

$$E = \frac{p_x^2}{2m_e} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_e}$$

El valor numérico es

$$\boxed{E = 1.52 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 0.95\ \mathrm{eV}} \tag{13}$$

c) La longitud de onda de un fotón que tenga una energía dada está dada por la expresión (3). En nuestro caso, utilizando el valor (13),

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{E} = 1.31 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1.31\ \mu\mathrm{m}}$$