Física II

Relación 3: Ondas

Juan J. Meléndez

Problema 3.1

Suponiendo que A y v son constantes, demostrar que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de ondas unidimensional:

a) $y(x,t) = k(x+ct)^3$;

b) $y(x,t) = Ae^{ik(x-ct)}$;

c) $y(x,t) = \ln[k(x-ct)]$;

d) $y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$

donde k y ω son el vector de onda y la frecuencia de la onda en cada caso.

La ecuación de ondas unidimensional es

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

Comprobemos entonces que las funciones del enunciado verifican la ecuación (1):

a) En este primer caso,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 3k(x+ct)^2$$

y

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 6k(x+ct)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 3kc(x+ct)^2$$

y

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 6kc^2(x+ct)$$

de modo que, efectivamente se verifica (1).

b) Ahora

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = ikAe^{ik(x-ct)}$$

y

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -Ak^2e^{ik(x-ct)},$$

mientras que

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -ikcAe^{ik(x-ct)}$$

y

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -Ak^2c^2e^{ik(x-ct)},$$

que también verifica la ecuación de ondas.

c) En el tercer caso,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{x-ct}$$

y
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-ct)^2}$$
Por otra parte,
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\frac{c}{x-ct}$$
y
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{c^2}{(x-ct)^2},$$
que también verifica la ecuación de ondas.

d) Por último, en este caso,
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = Ak\cos kx\cos\omega t$$
y
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -Ak^2\sin kx\cos\omega t = -k^2 y(x,t),$$
mientras que
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega\sin kx\sin\omega t$$
y
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin kx\cos\omega t = -\omega^2 y(x,t)$$
de modo que, teniendo en cuenta que
$$\omega = ck,$$
lleva a que la función *d*) verifica la ecuación (1).

Problema 3.2

a) Calcular la derivada de la velocidad de una onda en una cuerda con respecto a la tensión, $\mathrm{d}c/\mathrm{d}F_T$, y demostrar que las diferenciales $\mathrm{d}c$ y $\mathrm{d}F_T$ verifican la expresión
$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T}$$

b) Una onda se mueve a 300 m/s en un alambre que está sometido a una tensión de 500 N. Utilizando la expresión anterior para $\mathrm{d}F_T$ y $\mathrm{d}v$ para aproximar la variación de tensión, hallar en qué cantidad debe variarse la tensión para aumentar la velocidad a 312 m/s.

c) Calcular la variación de tensión de forma exacta, y compararla con la aproximación del apartado *b*).

En los apartados *b*) y *c*), suponer que la cuerda no se alarga cuando se aplica la tensión.

a) La velocidad de propagación de una onda por una cuerda elástica está dada por

$$c = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}, \tag{2}$$

donde F_T y μ son, respectivamente, la tensión a la que se encuentra la cuerda y su densidad lineal. entonces

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}F_T} = \frac{1}{2}\left(\frac{F_T}{\mu}\right)^{-1/2}\frac{1}{\mu}$$

o bien, multiplicando y dividiendo por F_T/μ,

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}F_T} = \frac{1}{2}\frac{c}{F_T}$$

de donde, reorganizando,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T}} \tag{3}$$

b) Despejando $\mathrm{d}F_T$ de (3) se tiene

$$\mathrm{d}F_T = 2F_T\frac{\mathrm{d}c}{c} \tag{4}$$

Utilizando la aproximación del enunciado, podemos utilizar la expresión (4) con $F_T = 500$ N, $c = 300$ m/s y $\mathrm{d}c = 12$ m/s. Entonces

$$\boxed{\Delta F_T = 40 \text{ N}}$$

c) Calculemos exactamente la variación de tensión. Para ello, tengamos en cuenta que, si c_1 y c_2 son las velocidades que corresponden a dos tensiones $F_{T,1}$ y $F_{T,2}$, (2) lleva a

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{F_{T,2}}{F_{T,1}}}$$

Entonces,

$$F_{T,2} = F_{T,1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$$

En nuestro caso, usando $c_1 = 300$ m/s, $c_2 = 312$ m/s y $F_{T,1} = 500$ N, resulta

$$F_{T,2} = 540.8 \text{ N}$$

de manera que

$$\boxed{\Delta F_T = 40.8 \text{ N},}$$

que coincide aproximadamente con el resultado aproximado del apartado anterior.

Problema 3.3

Un alambre de 12.0 m de longitud y 85 g de masa se estira bajo una tensión de 180 N. En el extremo izquierdo del alambre se genera un pulso, y 25 ms más tarde se genera otro pulso en el extremo derecho. Determinar en qué posición de encuentran los dos pulsos.

Teniendo en cuenta la expresión (2), la velocidad de propagación de los pulsos depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal de masa. Ambos pulsos se propagan, por tanto, a la misma velocidad, pero se emiten en instantes de tiempo distintos. En concreto, la posición instantánea del primer pulso es

$$x_1(t) = ct,$$

suponiendo que el tiempo empieza a contar desde que se emite el primer pulso. La posición instantánea del segundo es

$$x_2(t) = L - c(t + \Delta t),$$

donde L es la longitud de la cuerda y Δt es el tiempo que transcurre entre la emisión de los dos pulsos. El instante en el que se encuentran, que llamaremos $\bar{t}$, se verifica

$$x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$$

que lleva a

$$\bar{t} = \frac{1}{2c}(L + c\Delta t), \tag{5}$$

donde la velocidad v está dada por (2). La densidad lineal es, por definición,

$$\mu = \frac{m}{L} = 0.007 \text{ kg/m}^3,$$

y $F_T = 180$ N, de modo que

$$c = 159.41 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en (5), resulta

$$\bar{t} = 0.05 \text{ s}$$

En ese instante, los pulsos se encuentran en las posiciones $x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$:

$$\boxed{x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \approx 8.0 \text{ m}}$$

Problema 3.4

La función de onda para una onda armónica en una cuerda es

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t),$$

donde $A = 0.001$ m, $k = 62.8$ m^{-1} y $\omega = 314$ s^{-1}.

a) ¿En qué sentido se desplaza esta onda, y cuál es su velocidad?

b) Hallar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda.

c) Calcular la velocidad máxima con la que se mueve un punto cualquiera de esta cuerda.

a) La función de onda tiene la forma $f(kx+\omega t)$, que corresponde a una onda que viaja hacia la izquierda. Por otra parte, la velocidad de la onda se relaciona con su vector de onda y su frecuencia como

$$\omega = ck,$$

de donde

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = 5.0 \text{ m/s}}$$

b) La frecuencia de la onda se puede identificar directamente desde la forma de la función de la describe, puesto que

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi},$$

donde $\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\nu \approx 50\ \mathrm{Hz},}$$

de manera que su periodo es

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.02\ \mathrm{s}}$$

Por otra parte, la longitud y el vector de onda se relacionan como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

de manera que, en nuestro caso,

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.1\ \mathrm{m}}$$

c) La velocidad con la que oscilan los puntos de la onda está dada por

$$v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = A\omega \cos(kx + \omega t),$$

cuyo valor máximo, que se alcanza cuando $|\cos(kx + \omega t)| = 1$ es

$$\boxed{v_{y,max} = A\omega = 0.314\ \mathrm{m/s}}$$

Problema 3.5

Una onda armónica transversal de 40 Hz de frecuencia se propaga por una cuerda. En un cierto instante, dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados en $\pi/6$. Calcular

a) la longitud de la onda;

b) la diferencia de fase entre dos desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí;

c) la velocidad de la onda.

a) Consideremos una onda armónica que se propaga en una dirección arbitraria. En un instante dado, la diferencia de fase entre dos puntos en las posiciones x_1 y x_2 es, por definición,

$$\delta = k(x_2 - x_1) \equiv k\Delta x,$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda. Entonces

$$k = \frac{\delta}{\Delta x},$$

de donde

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi \Delta x}{\delta} = 60\ \mathrm{cm}}$$

b) Por otra parte, la diferencia de fase en un punto dado x entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 es

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) \equiv 2\pi\nu\Delta t,$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda. En nuestro caso, numéricamente, resulta

$$\boxed{\Delta\varphi = 0.4\pi \text{ rad}}$$

c) Finalmente, la velocidad de la onda se puede calcular a partir de la frecuencia y la longitud de onda (o, alternativamente, el número de onda) a través de

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

de donde

$$\boxed{c = \nu\lambda = 24 \text{ m/s}}$$

Problema 3.6

Dos fuentes de ondas sonoras oscilan en fase. En un punto a 5 m de una fuente y a 5.17 m de la otra la amplitud del sonido procedente de cada fuente por separado es p_0. Calcular la amplitud de la onda resultante si la frecuencia de las ondas sonoras es

a) 1000 Hz;

b) 2000 Hz;

c) 500 Hz;

Consideremos dos fuentes de ondas que emiten en fase, y sea S un punto del espacio que dista x_1 y x_2 de ellas. Suponiendo que las dos ondas emitidas tienen igual amplitud p_0, la amplitud resultante de su superposición en el punto S, que llamaremos p, está dada por

$$p = 2p_0 \cos\frac{1}{2}\delta, \tag{6}$$

donde δ es el desfase entre las dos ondas que se superponen, que está dado por

$$\delta = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}, \tag{7}$$

siendo λ la longitud de onda, que se relaciona con la frecuencia y la velocidad de las ondas como

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

a) En este caso, tomando $v = 340$ m/s, la longitud de onda es

$$\lambda = 0.340 \text{ m},$$

de manera que, sustituyendo en (7), el desfase es

$$\delta = \pi$$

y, por tanto, la amplitud de la superposición es

$$\boxed{p(1000 \text{ Hz}) = 2p_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0,}$$

de manera que, a esa frecuencia, las ondas interfieren destructivamente en el punto S. Este resultado es esperable, puesto que *b*) Para una frecuencia de 2000 Hz es

$$\lambda = 0.17 \text{ m},$$

de modo que el desfase es

$$\delta = 2\pi$$

y

$$\boxed{p(2000 \text{ Hz}) = 2p_0 \cos \pi = -2p_0},$$

que indica que a esa frecuencia las ondas interfieren constructivamente en S.

c) Finalmente, para una frecuencia de 500 Hz, se tiene

$$\lambda = 0.68 \text{ m}$$

y

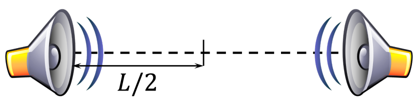
$$\delta = \frac{\pi}{2},$$

de manera que

$$\boxed{p(500 \text{ Hz}) = 2p_0 \cos \frac{\pi}{4} = 1.41 p_0}$$

Problema 3.7

Dos altavoces enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 680 Hz. Determinar los puntos entre los altavoces a lo largo de la línea que los une para los que la intensidad del sonido es *a*) máxima y *b*) mínima. Despreciar la variación de intensidad de cada altavoz con la distancia.



Consideremos la situación de la figura de la derecha. Referida al centro del segmento que une los altavoces, la onda emitida por el de la izquierda es

$$y_1(x,t) = A \sin\left[k\left(x + \frac{L}{2}\right) - \omega t\right],$$

y la emitida por el de la derecha, que viaja hacia la izquierda, es

$$y_2(x,t) = A \sin\left[k\left(x - \frac{L}{2}\right) + \omega t\right],$$

donde estamos suponiendo que los dos altavoces emiten en fase. En un punto x arbitrario del segmento entre los altavoces, la onda resultante de la superposición de y_1 e y_2 es

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left\{\sin\left[k\left(x + \frac{L}{2}\right) - \omega t\right] + \sin\left[k\left(x - \frac{L}{2}\right) + \omega t\right]\right\},$$

que, usando la identidad

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2},$$

se escribe como

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\omega t - \frac{kL}{2}\right)\sin kx, \tag{8}$$

donde $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ y λ es la longitud de onda, que está dada por

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm} \tag{9}$$

a) La intensidad del sonido es máxima cuando las ondas emitidas por los dos altavoces interfieren constructivamente. En nuestro caso, teniendo en cuenta (8), la condición de interferencia constructiva es que $\sin kx$ sea un extremo, es decir

$$kx = \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

o bien

$$x = \frac{2n+1}{4}\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

esto es, numéricamente, teniendo en cuenta (9),

$$\boxed{x = \pm 12.5 \text{ cm}, \pm 37.5 \text{ cm}, \pm 62.5 \text{ cm}, \pm 87.5 \text{ cm}}$$

El siguiente posible máximo, correspondiente a $x = 112.5$ cm, es mayor que la mitad de la distancia que une los dos altavoces.

b) Por otra parte, la intensidad es mínima cuando las ondas interfieren destructivamente. La condición de interferencia destructiva es que $\sin kx$ sea cero. Por tanto

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

o bien

$$x = \frac{n}{2}\lambda \quad n \in \mathbb{Z}$$

Numéricamente, usando de nuevo (9), es

$$\boxed{x = 0, \pm 25 \text{ cm}, \pm 50 \text{ cm}, \pm 75 \text{ cm}}$$

Como antes, el siguiente mínimo posible, en $x = 100$ cm, está fuera del segmento que une los dos altavoces.

Problema 3.8

En un violoncello, como en todos los instrumentos de cuerda, la posición de los dedos determina la frecuencia fundamental de las cuerdas. Suponiendo que una de las cuerdas de un violoncello se afina para tocar un Do a 262 Hz cuando se toca con su longitud completa, ¿cuál debe ser la fracción de acortamiento de la cuerda para hacer sonar un Mi a 330 Hz? ¿Y un Sol a 392 Hz?

La relación que existe entre la longitud del modo n-ésimo en una onda estacionaria, λ_n y su frecuencia ν_n es

$$v = \lambda_n \nu_n, \tag{10}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda. Según (10), la relación entre las longitudes de dos modos fundamentales en la cuerda es

$$\lambda_n = \lambda_0 \frac{\nu_0}{\nu_n},$$

de modo que la fracción de acortamiento es

$$r_n \equiv \left| \frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_0} \right| = 1 - \frac{\nu_0}{\nu_n}$$

En el caso de hacer sonar un Mi a 330 Hz, con $f_0 = 262$ Hz, se tiene

$$\boxed{r_{Mi} = 20.61\,\%}$$

y, para hacer sonar un Sol a 392 Hz,

$$\boxed{r_{Sol} = 33.16\,\%}$$

Problema 3.9

La cuerda de un piano se puede romper si la tensión que soporta es mayor que 700 N. Una cuerda de 3 m de longitud y densidad lineal $\mu = 0.0025$ kg/m tiene dos frecuencias resonantes consecutivas a 252 Hz y 336 Hz. Comprobar si esta cuerda puede utilizarse con seguridad en el mecanismo de un piano.

Supongamos que la frecuencia de 252 Hz corresponde al n-ésimo armónico de la cuerda del piano. En tal caso, se verifica

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}, \tag{11}$$

donde v es la velocidad de la onda y L la longitud de la cuerda. Por otra parte, para el siguiente modo resonante, el $n+1$-ésimo, se verifica

$$\nu_{n+1} = \frac{(n+1)c}{2L},$$

de modo que, dividiendo ambas expresiones, se tiene

$$\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} = \frac{n}{n+1} = 0.75,$$

de donde resulta

$$n = 3$$

La velocidad de la onda se puede calcular entonces a partir de (11):

$$c = \frac{2}{n} L\nu_n$$

y se relaciona con la tensión de la cuerda y su densidad lineal de masa a través de

$$c = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Entonces

$$\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{2}{n} L\nu_n,$$

de donde, despejando, resulta

$$F_T = \frac{4}{n^2} L^2 \mu \nu_n^2 = 635 \text{ N}$$

que es menor que el valor máximo que puede soportar la cuerda con seguridad. Por tanto, la cuerda puede utilizarse de forma segura en la caja de resonancia de un piano.

Problema 3.10

La función de onda para una onda estacionaria sobre una cuerda fija por ambos extremos es

$$y(x,t) = A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

donde $A = 0.05$ m, $k = 2.5$ m^{-1} y $\omega = 500$ s^{-1}.

a) Calcular la velocidad y la amplitud de las dos ondas móviles que originan esta onda estacionaria.

b) Calcular la distancia entre dos nodos sucesivos de la cuerda.

c) Calcular la longitud más corta posible de la cuerda.

a) La superposición de dos ondas viajeras en sentidos contrarios con igual amplitud A_0 y frecuencia da lugar a una onda estacionaria de igual frecuencia cuya amplitud es

$$A = 2A_0$$

En nuestro caso, por tanto, la amplitud de las ondas individuales que se superponen es

$$\boxed{A_0 = \frac{A}{2} = 0.025 \text{ m}}$$

Por otra parte, la velocidad de las ondas viajeras está dada por

$$c = \frac{\omega}{k},$$

donde ω y k son la frecuencia y el número de onda de las ondas viajeras, que coinciden con las de la estacionaria. Entonces

$$\boxed{c = 200 \text{ m/s}}$$

b) Por definición, los nodos de la cuerda son los puntos en los que

$$y(x_n, t) \equiv 0 \ \ \forall t$$

En nuestro caso, estos puntos verifican

$$\sin kx_n = 0,$$

de modo que

$$x_n = \frac{n\pi}{k} \quad n \in \mathbb{Z}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es entonces

$$\boxed{\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{k} = 1.26 \text{ m}}$$

c) Supongamos que la onda del enunciado corresponde al n-ésimo armónico de la cuerda. En tal caso, la longitud de este armónico verifica

$$\lambda_n \equiv \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n},$$

donde L es la longitud de la cuerda. Entonces

$$L = n\frac{\pi}{k},$$

cuyo valor mínimo corresponde a $n = 1$, es decir, al modo fundamental de la cuerda. El valor numérico es

$$\boxed{L = 1.26 \text{ m}}$$

Problema 3.11

Una fuente de ondas emite un sonido a 200 Hz de frecuencia que se mueve por el aire en reposo con una velocidad de 343 m/s. Si la fuente se mueve a 80 m/s respecto al aire, calcular la frecuencia que percibe un observador si

a) la fuente se acerca al observador y éste se encuentra en reposo;

b) la fuente se aleja del observador, y éste se encuentra en reposo.

c) Repetir los aparados anteriores si la fuente se encuentra en reposo y es el observador el que se acerca o se aleja de ella.

a) La frecuencia percibida por un observador en reposo proveniente de un emisor que se acerca a él con velocidad u_f está dada por

$$\nu_r = \frac{c}{c - u_f}\nu_f,$$

donde ν_f es la frecuencia emitida y c es la velocidad de la onda con respecto al aire. En nuestro caso, con $c = 343$ m/s y $u_f = 80$ m/s resulta

$$\boxed{\nu_r = 260.8 \text{ Hz}}$$

b) Si el emisor se aleja del observador en reposo, las frecuencias percibida y emitida se relacionan mediante

$$\nu_r = \frac{c}{c + u_f}\nu_f,$$

de modo que, en nuestro caso,

$$\boxed{\nu_r = 162.2 \text{ Hz}}$$

c) En el caso en que el receptor se mueva con velocidad u_r, la relación entre las frecuencias recibida y emitida está dada por

$$\nu_r = \begin{cases} \dfrac{c + u_r}{c - u_f}\nu_f & \text{(si se acercan)} \\[2ex] \dfrac{c - u_r}{c + u_f}\nu_f & \text{(si se alejan)} \end{cases} \tag{12}$$

En nuestro caso, el emisor se encuentra en reposo, de manera que $u_f = 0$, y las expresiones (12) se simplifican a

$$\nu_r = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{u_r}{c}\right)\nu_f & \text{(si se acercan)} \\[2ex] \left(1 - \dfrac{u_r}{c}\right)\nu_f & \text{(si se alejan),} \end{cases}$$

esto es, numéricamente,

$$\boxed{\nu_r = \begin{cases} 246.6 \text{ Hz} & \text{(si se acercan)} \\ 153.4 \text{ Hz} & \text{(si se alejan)} \end{cases}}$$

Problema 3.12

Un murciélago que vuela hacia un obstáculo a una velocidad de 12 m/s emite pulsos sonoros breves y de alta frecuencia con una frecuencia de repetición de 80 Hz. Calcular el intervalo de tiempo transcurrido entre los pulsos de eco percibidos por el murciélago.

El murciélago emite sus pulsos sonoros mientras se está moviendo con una cierta velocidad $u_f = 12$ m/s. Esos pulsos viajan hacia el obstáculo a velocidad v, donde inciden con frecuencia

$$\nu_r = \frac{c}{c-u_f}\nu_f < \nu_r$$

Cuando los pulsos se reflejan, su velocidad es también c. En este caso, las ondas reflejadas (emitidas) por el obstáculo, que está en reposo, viajan hacia un receptor, el murciélago, que se mueve hacia el emisor con velocidad u_f. La frecuencia que recibe el murciélago es entonces

$$\nu_r' = \frac{c+u_f}{c}\nu_r = \frac{c+u_f}{c-u_f}\nu_f \tag{13}$$

El tiempo entre pulsos recibidos por el murciélago es entonces, por definición,

$$T = \frac{1}{\nu_r'} = \frac{c-u_f}{c+u_f}\frac{1}{\nu_f}$$

Numéricamente,

$$\boxed{T = 0.0116 \text{ s} = 11.6 \text{ ms}}$$

Una forma alternativa de resolver el problema es considerar que, *con relación al obstáculo*, el problema consiste en la emisión por un foco y recepción por un receptor que están ambos en movimiento con velocidad u_f. La frecuencia correspondiente al efecto Doppler por emisor y receptor móviles está dada por

$$\nu_r = \frac{c+u_f}{c-u_f}\nu_f,$$

que coincide con el resultado (13).

Problema 3.13

Una unidad de radar de la policía transmite microondas de frecuencia $3{\cdot}10^{10}$ Hz con una velocidad en el aire de $3{\cdot}10^8$ m/s.

a) Un coche se aleja de este radar a una velocidad de 140 km/h. ¿Cuál es la diferencia de frecuencia entre la señal reflejada por el coche, y la que se recibe en el radar?

b) Repetir el cálculo si el coche de la policía se mueve a 60 km/h en la misma dirección que el otro coche.

a) El proceso de detección de la velocidad de un coche mediante un radar consiste, en primer lugar, en emitir ondas de cierta frecuencia por parte de la unidad de radar. Estas ondas inciden sobre el coche cuya velocidad se quiere medir, donde se reflejan y vuelven a la unidad radar. A partir de la frecuencia de las ondas recibidas se puede calcular la velocidad del coche, como vamos a ver.

En primer lugar, las microondas emitidas por la unidad radar en reposo, de frecuencia ν_f, inciden sobre el coche, que se aleja de la unidad a velocidad u_r. La frecuencia de las ondas cuando alcanzan el coche es entonces

$$\nu_r = \frac{c - u_r}{c}\nu_f, \tag{14}$$

donde c es la velocidad del sonido en el aire. La frecuencia $\nu_r < \nu_f$, lógicamente.

Cuando estas microondas se reflejan, el coche se comporta como un emisor de ondas de frecuencia ν_r que se mueve a velocidad $u_f = u_r$. Estas frecuencias se propagan entonces hacia un receptor en reposo, que es la unidad de radar. La frecuencia que recibe esta unidad, que llamaremos ν_r', es entonces

$$\nu_r' = \frac{c}{c + u_r}\nu_r = \frac{c - u_r}{c + u_r}\nu_r,$$

donde hemos tenido en cuenta (14); la frecuencia $\nu_r' < \nu_r$ también. La diferencia entre las ondas emitidas y recibidas por el radar es entonces

$$\Delta\nu = \nu_r' - \nu_r = \frac{2u_r}{c + u_r}\nu_f,$$

esto es, numéricamente,

$$\boxed{\Delta\nu = 7780 \text{ Hz} = 7.78 \text{ kHz}}$$

b) Si el coche de policía se mueve a una cierta velocidad u_f hacia el coche, que se mueve a velocidad u_r, la frecuencia ν_r pasa a ser

$$\nu_r = \frac{c + u_r}{c + u_f}\nu_f \tag{15}$$

De acuerdo con (15), la relación entre ν_r y ν_f depende de cómo sean las velocidades u_r y u_f. En particular, si las dos velocidades son iguales, no hay efecto Doppler.

Cuando las ondas se reflejan en el coche, éste pasa a ser un emisor de ondas de frecuencia ν_r y velocidad $u_f' = u_r$. Este emisor se aleja del receptor, que a su vez se acerca a él con velocidad $u_r' = u_f$. Así, el movimiento del emisor tiende a disminuir la frecuencia que se mide en el receptor, mientras que el movimiento de éste tiende a aumentarla. En consecuencia, la frecuencia ν_r' es

$$\nu_r' = \frac{c - u_r'}{c + u_f'}\nu_r = \frac{c - u_f}{c + u_r}\nu_r = \frac{c - u_f}{c + u_r} \cdot \frac{c + u_r}{c + u_f}\nu_f = \frac{c - u_f}{c + u_f}\nu_f,$$

de manera que la diferencia de frecuencia es, en este caso,

$$\Delta\nu = \nu_r' - \nu_f = \frac{2u_f}{c + u_f}$$

Numéricamente,

$$\boxed{\Delta\nu = 4440 \text{ Hz} = 4.44 \text{ kHz}}$$

Problema 3.14

Un coche se aproxima a una pared reflectora. Un observador inmóvil situado detrás del coche escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del coche, y otro de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. Calcular

a) la velocidad del coche;

b) la frecuencia de la bocina;

c) la frecuencia que escucha el conductor del coche procedente de la reflexión del sonido en la pared.

Cuando la bocina el coche emite un sonido de frecuencia ν_f, el observador en reposo percibe una frecuencia $\nu_r < \nu_f$ debido al efecto Doppler en el coche. Esta frecuencia está dada por

$$\nu_r = \frac{c}{c + u_f}\nu_f, \tag{16}$$

donde u_f es la velocidad con la que se mueve el coche. Por otra parte, el sonido emitido por la bocina es reflejado por la pared, hacia la que se acerca el coche. La frecuencia de las ondas que inciden sobre la pared es

$$\nu_r' = \frac{c}{c - u_f}\nu_f \tag{17}$$

a) Dividiendo (17) entre (16) resulta

$$\frac{\nu_r'}{\nu_r} \equiv r = \frac{c - u_f}{c + u_f},$$

de donde

$$\boxed{u_f = \frac{r-1}{r+1}c = 25.2 \text{ m/s} = 90.6 \text{ km/h}}$$

b) Despejando de (16) [o (17)] resulta

$$\nu_f = \frac{c + u_r}{c}\nu_r,$$

esto es, numéricamente,

$$\boxed{\nu_f = 800 \text{ Hz}}$$

c) Para calcular la frecuencia que escucha el conductor del coche, tengamos en cuenta que él se acerca con velocidad u_f a un emisor en reposo que emite ondas a frecuencia $\nu_r' = 863$ Hz. La frecuencia que percibe el conductor es entonces

$$\nu_c = \frac{c + u_f}{c}\nu_r',$$

esto es,

$$\boxed{\nu_c = 926 \text{ Hz}}$$