Física II

Relación 2: Oscilaciones

Juan J. Meléndez

Problema 2.1

La posición de una partícula viene dada por

$$x(t) = 2.5 \cos \pi t,$$

donde $x(t)$ se mide en metros y t en segundos.

a) Determinar la velocidad y la aceleración máximas de la partícula.

b) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $x = 1.5$ m.

a) La velocidad y la aceleración de la partícula están dadas, respectivamente, por

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -2.5\pi \sin \pi t, \tag{1}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -2.5\pi^2 \cos \pi t, \tag{2}$$

cuyos valores máximos son, respectivamente,

$$\boxed{v_{máx} = 2.5\pi = 7.85 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{a_{máx} = 2.5\pi^2 = 24.67 \text{ m/s}}$$

b) El instante en el que $x = 1.5$ m, que escribiremos $\tilde{t}$, verifica

$$x(\tilde{t}) = 2.5 \cos \pi\tilde{t} = 1.5,$$

de modo que

$$\pi\tilde{t} = \arccos \frac{1.5}{2.5} = 0.927$$

Teniendo en cuenta entonces (1) y (2), la velocidad y la aceleración en ese instante están dadas por

$$\boxed{v(\tilde{t}) = -6.28 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{a(\tilde{t}) = -14.80 \text{ m/s}}$$

Problema 2.2

Un objeto de masa desconocida se cuelga verticalmente del extremo de un muelle sin deformación, y se suelta desde el reposo. El objeto cae 3.42 cm antes de quedar en reposo por primera vez. Calcular el período del movimiento.

Consideremos la situación en que el cuerpo, colgando del muelle, se encuentra en reposo, y tomemos el origen de energías potencial gravitatoria y potencial elástica en esa situación. Cuando el objeto alcanza el reposo por primera vez, el cambio de energía potencial gravitatoria es $-mg\Delta y$, donde $\Delta y = 3.42$ cm, y el cambio de energía potencial elástica es $\frac{1}{2}m\omega^2\Delta y^2$. Puesto que el sistema es conservativo,

$$\frac{1}{2}m\omega^2\Delta y^2 - mg\Delta y = 0,$$

de donde, despejando, resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{\Delta y}}$$

El periodo del movimiento es entonces

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}}\pi,$$

cuyo valor numérico es

$$\boxed{T = 0.26 \text{ s}}$$

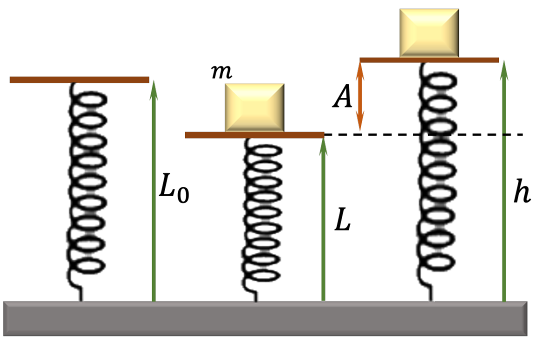
Problema 2.3

Un objeto de 2 kg de masa está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8 cm, y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de forma que la velocidad inicial es de 0.3 m/s. Calcular

a) la altura máxima con respecto al suelo a la que se eleva el objeto;

b) el tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima por primera vez;

c) la velocidad mínima que debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado.



a) Cuando se coloca el objeto de masa $m = 2$ kg sobre el muelle y se alcanza el equilibrio, el peso del objeto es compensado por la fuerza elástica del muelle, y se verifica

$$mg + k\Delta L = mg + k(L - L_0) = 0, \quad (3)$$

donde $L < L_0$, como indica la figura; la fuerza elástica es de sentido opuesto al peso.

En esa posición se imprime un impulso al objeto, que empieza a describir un M. A. S. de cierta amplitud A. La máxima altura que alcanza el objeto medida desde el suelo verifica entonces

$$h = L + A \tag{4}$$

Por otra parte, la velocidad imprimida por la fuerza es la máxima velocidad que el objeto oscilante puede alcanzar, $v_{máx}$, de manera que

$$v_{máx} = \omega A,$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Teniendo en cuenta (3), resulta entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta L}} = 18.07 \text{ s}^{-1} \tag{5}$$

y

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = v_{máx}\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = 1.7 \text{ cm} \tag{6}$$

Sustituyendo en (4) resulta entonces, con $L = 5$ cm,

$$\boxed{h = 6.7 \text{ cm}}$$

b) Por definición, el tiempo que tarda el oscilador en alcanzar la altura máxima es

$$t_{máx} = \frac{3}{4}T,$$

donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

es el periodo del M. A. S. En nuestro caso, usando (5),

$$T = 0.35 \text{ s}$$

y

$$\boxed{t_{máx} = 0.26 \text{ s}}$$

c) Según el resultado del apartado *a*), el muelle siempre se encuentra comprimido si se le imprime una velocidad inicial de 0.3 m/s, debido al peso del cuerpo que se apoya sobre él. Para que en algún momento la longitud de muelle sea su longitud natural L_0, hay que suministrarle por tanto una velocidad inicial mayor que 0.3 m/s.

Para calcular esta velocidad, tengamos en cuenta que la amplitud del M. A. S. vertical depende de la velocidad que se imprime inicialmente al cuerpo a través de (6). Entonces, la velocidad que se debe imprimir para que la amplitud A sea igual a $\Delta L = L_0 - L$, que llamaremos $v_{mín}$ verifica

$$\Delta L = v_{mín}\sqrt{\frac{\Delta L}{g}},$$

de donde

$$\boxed{v_{mín} = \sqrt{g\Delta L} = 0.542 \text{ m/s}}$$

Problema 2.4

Un bloque de masa 0.12 kg está suspendido de un muelle. Cuando se coloca una pequeña piedra de 30 g de masa sobre el bloque, el muelle se alarga 5 cm más. Con la piedra sobre el bloque, el muelle oscila con una amplitud de 12 cm. Calcular

a) la frecuencia del movimiento de las dos masas;

b) el tiempo que tardan el bloque y la piedra en recorrer la distancia entre el punto más bajo y el punto más alto de la trayectoria;

c) la fuerza neta que actúa sobre la piedra cuando se encuentra en el punto de máximo desplazamiento hacia arriba;

a) Cuando la primera masa, que llamaremos m_1, está suspendida del muelle se verifica

$$m_1 g = k\Delta L, \tag{7}$$

donde k es la constante elástica del muelle y ΔL es su alargamiento. Cuando se coloca la segunda masa, se verifica

$$m_1 g + m_2 g = k(\Delta L + \Delta L'),$$

donde $\Delta L' = 5$ cm. Teniendo en cuenta (7), se tiene también

$$k\Delta L + m_2 g = k\Delta L + k\Delta L',$$

de modo que

$$k = \frac{m_2}{\Delta L'} g$$

La frecuencia del movimiento conjunto es entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{g}{\Delta L'}}$$

En nuestro caso, numéricamente,

$$\boxed{\omega = 6.26 \text{ s}^{-1}}$$

b) Por definición, el tiempo que pide el enunciado es la mitad del periodo de oscilación, que está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.0 \text{ s},$$

de manera que el tiempo τ es

$$\boxed{\tau = 0.5 \text{ s}}$$

c) Por definición, la fuerza neta que se ejerce sobre la piedra es

$$F_{neta} = m_2 a_2,$$

donde a_2 es la aceleración de la piedra, que es igual a la del bloque y está dada por

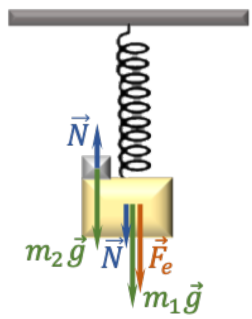
$$a_2 = -\omega^2 y_2, \tag{8}$$

donde y_2 es la posición instantánea de la piedra. En el punto de máximo desplazamiento vertical, $y_2 = A$, donde A es la amplitud del movimiento, y la fuerza neta está orientada hacia abajo. Su módulo es

$$\boxed{F_{neta} = m_2\omega^2 A = 0.14 \text{ N}}$$

d) Suponiendo que el sistema bloque + piedra está subiendo, las fuerzas que actúan sobre el bloque y la piedra son las que aparecen en la figura de la derecha. Para la piedra, la segunda ley de Newton se escribe

$$m_2 g - N = m_2 a, \tag{9}$$



donde a es la aceleración común del bloque y la piedra, que se relaciona con la elongación instantánea a través de (8). En particular, en el punto de máxima elongación, es $y_2 = A$. La condición para que la piedra se separe del bloque en ese punto es que deje de haber fuerza de reacción normal N. Así pues, la máxima amplitud debe verificar

$$m_2 g = m_2 a = m_2\omega^2 A_{máx},$$

de donde

$$A_{máx} = \frac{g}{\omega^2} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \Delta L'$$

En nuestro caso, numéricamente, es

$$\boxed{A_{máx} = 0.25 \text{ m}}$$

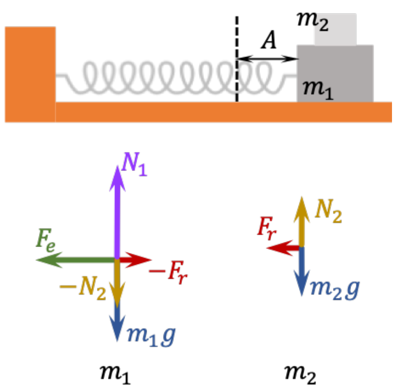
Problema 2.5

Un objeto de masa m_1 que desliza sobre una superficie horizontal lisa sujeta a un muelle de constante de fuerza k oscila con amplitud A. Cuando el muelle experimenta su máxima deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca sobre m_1 una masa m_2.

a) Determinar el valor del mínimo coeficiente de rozamiento estático entre las dos masas que evita que m_2 deslice sobre m_1.

b) Suponiendo que el rozamiento estático hace que las masas se muevan conjuntamente, discutir cómo se modifican la energía total, la amplitud del movimiento y la frecuencia angular al colocar m_2 sobre m_1.

a) Consideremos la situación en la que el muelle experimenta su máxima deformación, que se representa en la figura de la derecha. En tal caso, las fuerzas que actúan sobre las masas m_1 y m_2 son las que se muestran también en la figura. La segunda ley de Newton se escribe entonces, para el cuerpo de masa m_1, como



$$F_e - F_r = m_1 a \tag{10}$$
$$N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \tag{11}$$

donde F_e y F_r son las fuerzas elástica y de rozamiento, respectivamente. Para el cuerpo de masa m_2,

$$Fr = m_2 a, \tag{12}$$
$$N_2 - m_2 g = 0 \tag{13}$$

La fuerza de rozamiento F_r verifica

$$F_r = \mu_e N_2 = \mu_e m_2 g, \tag{14}$$

donde hemos tenido en cuenta (13). Sustituyendo en (12) y despejando resulta entonces

$$a = \mu_e g \tag{15}$$

Teniendo en cuenta (14), la ecuación (10) indica que el mínimo coeficiente de rozamiento corresponde a la máxima aceleración. En otras palabras, el mínimo coeficiente de rozamiento se alcanza cuando la fuerza elástica es la máxima, esto es, cuando el alargamiento del muelle es el máximo. El módulo de la fuerza elástica en el punto de máxima deformación está dada por

$$F_e = kA$$

de manera que, sustituyendo en (10) resulta

$$kA - \mu_e m_2 g = m_1 a = \mu_e m_1 g,$$

de donde, despejando, resulta

$$\boxed{\mu_e = \frac{kA}{(m_1 + m_2)g}}$$

b) La amplitud del movimiento se impone exteriormente cuando se estira el muelle, de manera que no cambia al colocar la masa m_2. Por otra parte, la energía total del sistema también permanece constante, puesto que

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

donde k depende únicamente del muelle. Consideremos ahora la frecuencia de oscilación que, cuando la masa m_2 no está, es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}},$$

pasa a ser

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} < \omega_0$$

cuando se coloca la masa m_2.

Problema 2.6

a) Demostrar que la posición instantánea de un oscilador armónico simple, $x(t) = A_0 \cos(\omega t + \delta)$, se puede escribir también en la forma $x(t) = A_s \sin \omega t + A_c \cos \omega t$, y expresar A_s y A_c en términos de A_0 y δ.

b) Relacionar A_s y A_c con la posición y velocidad iniciales del oscilador.

a) Consideremos la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Aplicándola a la posición instantánea de un M. A. S., resulta

$$\begin{aligned} x(t) = A_0 \cos(\omega t + \delta) = A_0 (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) = \\ = -A_0 \sin \delta \sin \omega t + A_0 \cos \delta \cos \omega t \equiv A_s \sin \omega t + A_c \cos \omega t, \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$A_s = -A_0 \sin \delta$$

y

$$A_c = A_0 \cos \delta,$$

como queríamos demostrar.

b) Teniendo en cuenta (16), la posición inicial del M. A. S., x_0, verifica

$$\boxed{x_0 \equiv x(0) = A_c}$$

Por otra parte, la velocidad del M. A. S. es

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A_s \omega \cos \omega t - A_c \omega \sin \omega t$$

de modo que la velocidad inicial, v_0, es

$$v_0 \equiv v(0) = A_s \omega,$$

de donde

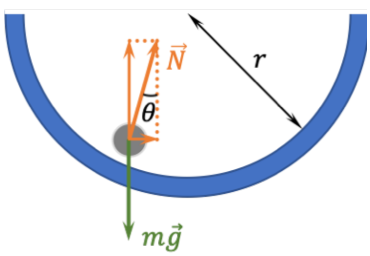
$$\boxed{A_s = \frac{v_0}{\omega}}$$

En definitiva, la elongación del M. A. S. se puede escribir también como

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Problema 2.7

Una partícula pequeña de masa m se desliza sin rozamiento por el interior de un cuenco esférico de radio r. Demostrar que, para pequeñas amplitudes, el movimiento de esta masa es como el de la lenteja de igual masa de un péndulo de longitud r.



Las fuerzas que actúan sobre la masa en el cuenco esférico son las que se representan en la figura de la derecha. Si descomponemos las fuerzas en sus componentes vertical y horizontal, la segunda ley de Newton se escribe

$$N \cos \theta - mg = 0 \tag{17}$$

$$N \sin \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \tag{18}$$

donde el ángulo θ se representa en la figura.

Si suponemos que este ángulo es pequeño, como indica el enunciado, se verifica

$$x \approx -r\theta,$$

$$\cos \theta \approx 1$$

y

$$\sin \theta \approx \theta,$$

de manera que (18) se escribe como

$$mg\theta = -mr \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

esto es,

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{r}\theta = 0,}$$

que es idéntica a la ecuación de movimiento de un péndulo simple de longitud r, como queríamos demostrar.

Problema 2.8

La aceleración debida a la gravedad g varía con la latitud en la Tierra debido a que esta no es exactamente esférica y al movimiento de rotación. Este hecho fue descubierto en el siglo XVII, cuando se observó que un reloj de péndulo, cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, atrasaba alrededor de 90 segundos por día cerca del Ecuador.

a) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración Δg produce un pequeño cambio en el período de un péndulo, que verifica

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

b) Calcular qué variación de g produce un cambio en el período de 90 segundos por día.

a) El período de oscilación de un péndulo de longitud l en un lugar de la Tierra donde la aceleración de la gravedad es g está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde ω denota la frecuencia angular de oscilación. Si la aceleración de la gravedad varía en una cantidad Δg, entonces el cambio correspondiente de período, ΔT, verifica

$$\Delta T = \frac{dT}{dg}\Delta g,$$

esto es,

$$\Delta T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^{-1}\frac{(-l)}{g^2}\Delta g = -\frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{l}{g}\frac{\Delta g}{g} = -\frac{1}{2}\underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T}\frac{\Delta g}{g},$$

esto es,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}, \tag{19}$$

como queríamos demostrar.

b) A partir de (19), resulta

$$\Delta g = -2g\frac{\Delta T}{T},$$

donde $\frac{\Delta T}{T} = 90$ s/día. Numéricamente, resulta

$$\boxed{\Delta g = -0.02 \text{ m/s}^2 = -2.0 \text{ cm/s}^2}$$

Problema 2.9

La figura de la derecha muestra un disco uniforme de radio $R = 0.8$ m y masa 6 kg con un pequeño agujero a una distancia d de su centro que puede servir como punto de pivote. Determinar

a) el valor de d para que el periodo de este péndulo sea de 2.5 s;

b) la distancia d para que el péndulo tenga el mínimo periodo posible;

c) el valor de este periodo mínimo.

El péndulo físico del enunciado oscila debido al momento de su peso. En efecto, consideremos la situación de la figura de la derecha. Como el péndulo está colgado de un punto situado a una distancia d con respecto a su diámetro horizontal, el peso da lugar a un momento de fuerza dado por

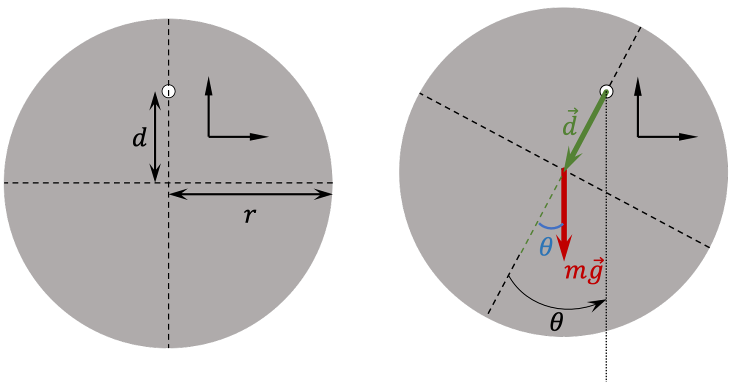
$$\vec{M} = m\vec{d} \times \vec{g}, \tag{20}$$

cuyo módulo es

$$M = mdg \sin\theta$$

y que es perpendicular al plano del papel y está dirigido hacia fuera. Suponiendo que el ángulo de desviación θ es pequeño, se puede hacer

$$M \approx mgd\theta \tag{21}$$



La ecuación de movimiento para el péndulo en rotación es entonces

$$M = -I\frac{d\omega}{dt} = -I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde I es el momento de inercia del péndulo físico y el signo “ $-$ ” indica que el momento de fuerza (20) es opuesto a la aceleración angular del sistema. Teniendo en cuenta (21), resulta

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mdg}{I}\theta = 0,$$

que es la ecuación de un M. A. S. de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{mdg}{I}}$$

En cuanto al momento de inercia del sistema, podemos calcularlo a través del teorema de los ejes paralelos, puesto que el eje de rotación dista una cantidad d del centro de masas del sistema. Entonces

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2 = \frac{1}{2}m(r^2 + 2d^2),$$

y la frecuencia angular se escribe finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{2dg}{r^2 + 2d^2}}$$

a) El valor de d que da un valor dado del periodo T, que llamaremos $\bar{d}$, se calcula de la condición

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2 + 2\bar{d}^2}{2\bar{d}g}}, \tag{22}$$

que es equivalente a

$$\bar{d}^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}\bar{d} + \frac{1}{2}r^2 = 0 \tag{23}$$

La solución de la ecuación (23) con sentido físico es

$$\boxed{\bar{d} = 0.245 \text{ m}}$$

La otra solución, $\bar{d} = 1.307$ m $> r$, que no tiene sentido físico.

b) La expresión (22) indica que el periodo del movimiento es una función de la distancia d. El valor de esta distancia para la que el periodo T es mínimo verifica entonces las condiciones

$$\left.\frac{dT(d)}{d(d)}\right|_{\tilde{d}} = 0 \tag{24}$$

$$\left.\frac{d^2T(d)}{d(d)^2}\right|_{\tilde{d}} > 0 \tag{25}$$

La condición (24) implica

$$\frac{1}{2\tilde{d}^2 g}\left(2\tilde{d}^2 - r^2\right) = 0,$$

esto es,

$$\boxed{\tilde{d} = \frac{\sqrt{2}r}{2} = 0.566 \text{ m}}$$

Es fácil comprobar que esta solución verifica (25) y da, por tanto, un mínimo del periodo del péndulo.

c) El valor del periodo mínimo es

$$T_{mín} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2 + 2\tilde{d}^2}{2\tilde{d}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}r}{g}}$$

Numéricamente,

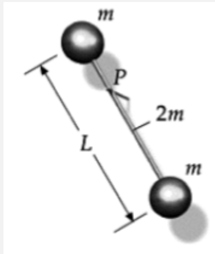
$$\boxed{T_{mín} = 2.13 \text{ s}}$$

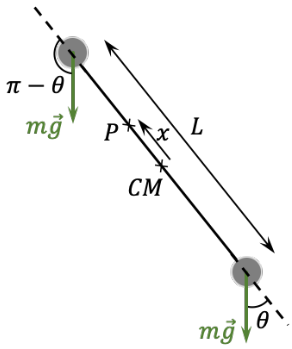
Problema 2.10

La figura de la derecha muestra una palanqueta con dos lentejas iguales de masa m sujetas a los extremos de una barra delgada de longitud L.

a) Despreciando la masa de la barra, encontrar la posición del punto de pivote P para la que el período del movimiento es mínimo.

b) Repetir el cálculo si la barra que une las lentejas tiene masa $2m$.





a) Consideremos la situación de la figura de la derecha. Los pesos de las dos lentejas ejercen sendos momentos de fuerza sobre el punto de pivote, P, que son de sentidos opuestos. La ecuación de rotación del sistema se escribe entonces como

$$\begin{aligned} mg\left(\frac{L}{2}-x\right)\sin(\pi-\theta)-mg\left(\frac{L}{2}+x\right)\sin\theta &= \\ = mg\left(\frac{L}{2}-x\right)\sin\theta-mg\left(\frac{L}{2}+x\right)\sin\theta &= \\ = -2mgx\sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

donde $x > 0$ es la distancia del centro de masas (CM) del sistema al punto P y hemos tenido en cuenta que los senos de ángulos suplementarios son iguales. En (26), I es el momento de inercia del sistema, que está dado por

$$I = I_{CM} + (2m)x^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (2m)x^2 = 2m\left(\frac{L^2}{4}+x^2\right)$$

Por otra parte, si suponemos que el ángulo $\theta \ll 1$, entonces $\sin\theta \approx \theta$, y (26) se simplifica a

$$-2mgx\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{27}$$

que es la ecuación de movimiento de un M. A. S. de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgx}{I}} = \sqrt{\frac{4gx}{L^2+4x^2}}$$

y periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{L^2+4x^2}{gx}} \equiv T(x) \tag{28}$$

La posición del punto de pivote para el que el período del movimiento es mínimo, que llamaremos $\bar{x}$, verifica

$$\left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{\bar{x}} = 0 \tag{29}$$

$$\left.\frac{d^2T(x)}{dx^2}\right|_{\bar{x}} > 0, \tag{30}$$

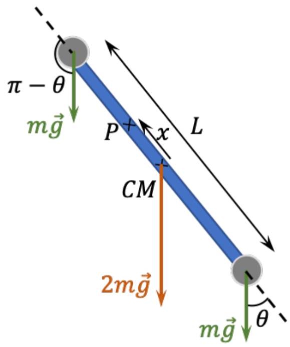
donde $T(x)$ está dado por (28). La ecuación (29) lleva a

$$L^2 - 4\bar{x}^2 = 0$$

cuyas solución es

$$\boxed{\bar{x} = \frac{L}{2}}$$

Es fácil comprobar que esta solución verifica (30), de manera que, efectivamente, el periodo de movimiento es mínimo cuando el sistema pivota sobre una de las dos lentejas.



b) En este caso, tanto los pesos de las dos lentejas como el peso de la barra (cuya masa no es despreciable ahora) ejercen momentos de fuerza sobre el punto de pivote, P. La ecuación de rotación del sistema se escribe como

$$mg\left(\frac{L}{2} - x\right)\sin(\pi - \theta) - mg\left(\frac{L}{2} + x\right)\sin\theta - 2mgx\sin\theta =$$
$$= -4mgx\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

o bien, en el límite $\theta \to 0$,

$$-4mgx\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{31}$$

El momento de inercia del sistema referido a su CM es ahora

$$I_{CM} = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(2m)L^2 = \frac{2}{3}mL^2$$

y, referido al punto de pivote P,

$$I = I_{CM} + 4mx^2 = 2m\left(\frac{L^2}{3} + 2x^2\right)$$

La ecuación (31) es la ecuación de un M. A. S. de frecuencia y periodo

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgx}{I}} = \sqrt{\frac{6gx}{L^2 + 6x^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 6x^2}{6gx}}$$

La condición (29) lleva ahora a

$$L^2 - 6\bar{x}^2 = 0,$$

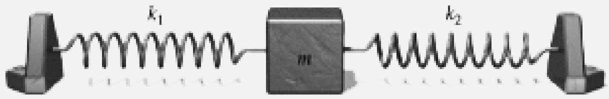
esto es,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{L}{\sqrt{6}},}$$

que corresponde efectivamente a un mínimo del periodo.

Problema 2.11

Demostrar que los cuerpos de masa m de la figura de debajo oscilan con una frecuencia $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{ef}}{m}}$, donde $k_{ef} = k_1 + k_2$ (a) y $\frac{1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ (b).

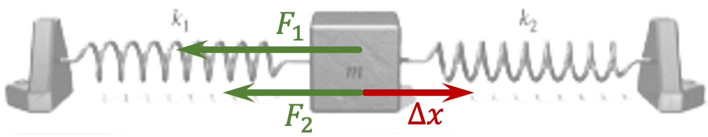


$a)$

$b)$

a) Supongamos para fijar ideas que el cuerpo de masa m se mueve hacia la derecha, en la dirección positiva del eje OX, como se indica en la figura debajo. En tal caso, el muelle de la derecha se comprime y el de la izquierda se alarga *en la misma cantidad*, de manera que la fuerza neta ejercida por ambos se dirige hacia la izquierda. El valor de esta fuerza es

$$F_{\text{neta}} = -k_1\Delta x - k_2\Delta x = -(k_1 + k_2)\Delta x \equiv -k_{ef}\Delta x,$$



de manera este cuerpo debe describir un M. A. S. de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ef}}{m}}$$

esto es,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{ef}}{m}},$$

con

$$\boxed{k_{ef} = k_1 + k_2,}$$

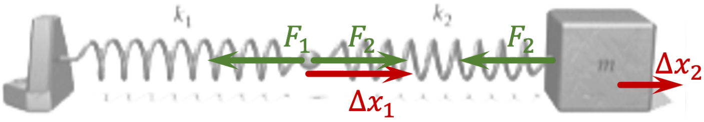
como queríamos demostrar.

b) Supongamos de nuevo que el cuerpo de masa m se desplaza hacia la derecha una cantidad Δx_2. En tal caso, el muelle de constante k_2 ejerce sobre este cuerpo una fuerza dada por

$$F_2 = -k_2\Delta x_2$$

El desplazamiento del cuerpo de masa m produce el desplazamiento hacia la derecha de la bola central en una cantidad Δx_1, de modo que el muelle de constante k_1 también ejerce una fuerza sobre la bola, dada por

$$F_1 = -k_1\Delta x_1$$



Si la bola central está en equilibrio, las fuerzas F_2 y F_1 son iguales, como se indicar en la figura, de manera que

$$-k_1\Delta x_1 = -k_2\Delta x_2$$

Entonces

$$\Delta x_2 = \frac{k_1}{k_2}\Delta x_1$$

El alargamiento total del sistema es $\Delta x_1+\Delta x_2$, y se relaciona con la fuerza F experimentada por el cuerpo de masa m mediante una constante de fuerza efectiva como

$$F = -k_{ef}\Delta x_{tot} = -k_{ef}(\Delta x_1 + \Delta x_2),$$

de manera que

$$k_{ef} = -\frac{F}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{k_1\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{k_1\Delta x_1}{\Delta x_1\left(1+\dfrac{k_1}{k_2}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\right)},$$

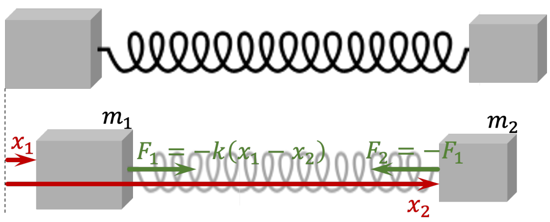
esto es,

$$\boxed{\frac{1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},}$$

como queríamos demostrar.

Problema 2.12

Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se atan a los dos extremos de un muelle de constante elástica k y se hacen oscilar. Demostrar que la frecuencia de oscilación de este sistema es $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, donde $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ es la masa reducida del sistema.



Consideremos la situación de la figura de la izquierda, y supongamos que las masas se desplazan a las posiciones x_1 y x_2. La ecuación de movimiento de la masa m_1 es

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1, \tag{32}$$

donde F_1 es la fuerza que actúa sobre esa masa. El módulo de esta fuerza es

$$F_1 = k\Delta L,$$

donde ΔL es el alargamiento del muelle, que está dado por

$$\Delta L = L_0 - x_1 - (L_0 - x_2) = x_2 - x_1$$

Teniendo en cuenta el diagrama de la figura, la ecuación (32) se escribe

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1), \tag{33}$$

Análogamente, para la masa m_2, resulta

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2 = -F_1 = -k(x_2 - x_1), \tag{34}$$

Las ecuaciones (33) y (34) se escriben alternativamente como

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) \tag{35}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) \tag{36}$$

o bien, restando ambas expresiones,

$$\frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)(x_2 - x_1),$$

esto es,

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\frac{k}{\mu}\Delta x, \tag{37}$$

donde

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

es la masa efectiva del sistema. La ecuación (37) es la ecuación de un M. A. S. de frecuencia es

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}},}$$

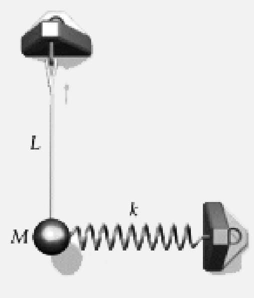
como queríamos demostrar.

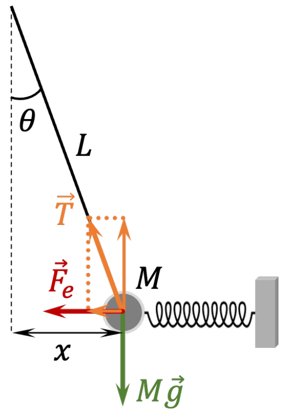
Problema 2.13

La figura de la derecha muestra un péndulo de longitud L con una lenteja de masa M unida a un muelle de constante elástica k. Cuando la lenteja está directamente debajo del soporte del péndulo, el muelle tiene su longitud natural de equilibrio.

a) Deducir una expresión para el periodo de este sistema cuando las vibraciones son de pequeña amplitud.

b) Si $M = 1$ kg y L es tal que, en ausencia de muelle, el periodo del péndulo es 2 s, calcular la constante de fuerza del muelle si el periodo del sistema oscilante es 1 s.





a) Las fuerzas que actúan sobre la lenteja del péndulo son su peso $M\vec{g}$, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$ y la fuerza elástica $\vec{F}_e$, cuyas direcciones y sentidos son las que se representan en la figura de la izquierda. La segunda ley de Newton se escribe entonces

$$\begin{gathered} T\cos\theta - Mg = 0 \\ -T\sin\theta - kx = Ma_x = M\frac{d^2x}{dt^2}, \end{gathered} \tag{38}$$

donde x es el alargamiento del muelle.

En rigor, el péndulo describe un arco de circunferencia desde la posición inicial. En las ecuaciones (38) estamos aceptando implícitamente que el ángulo θ es pequeño, de manera que el arco de circunferencia se puede aproximar por una recta en la dirección del eje OX. Teniendo en cuenta que $\theta \ll 1$,

$$\cos\theta \approx 1$$

y, por otra parte,

$$\sin\theta = \frac{x}{L},$$

de modo que las ecuaciones (38) se escriben como

$$T = Mg \tag{39}$$

$$-T\frac{x}{L} - kx = -\left(\frac{T}{L} + k\right)x = M\frac{d^2x}{dt^2} \tag{40}$$

Sustituyendo en (39) en (40) y simplificando, esta última se escribe como

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{Mg}{L} + k\right)x,$$

que es la ecuación de un M. A. S. de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{M}}$$

El periodo del sistema es entonces

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{M}}}} \tag{41}$$

b) La constante elástica del muelle se puede calcular a partir de (41):

$$k = M\left(\frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{g}{L}\right), \tag{42}$$

donde T y M son conocidos. En cuanto a la longitud L, la podemos calcular teniendo en cuenta que, en ausencia de muelle, el periodo del péndulo T_0 es

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

de modo que

$$\frac{g}{L} = \frac{2\pi}{T_0}$$

y, sustituyendo en (42),

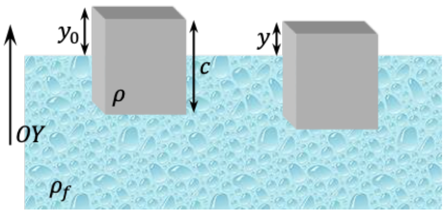
$$k = 4\pi^2 M \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}\right)$$

Numéricamente, resulta

$$\boxed{k = 29.61\ \mathrm{kg/s^2}}$$

Problema 2.14

Un bloque de madera de dimensiones $8 \times 7 \times 6\ \mathrm{cm}^3$ y densidad relativa 0.5 flota en agua con su arista más larga en la dirección de la vertical. Desde esta posición se empuja el bloque hacia abajo sumergiéndolo 2 cm con respecto a la línea de flotación. Demostrar que este bloque realiza entonces un M. A. S., y calcular el periodo de su movimiento.



Consideremos la situación en la que el bloque de madera flota en el agua, a la izquierda en la figura. En tal caso, el peso del bloque y el empuje del fluido deben ser iguales, de manera que

$$E_0 - mg = 0,$$

es decir,

$$\rho_f V_{sum} g = \rho_f ac(b - y_0)g = mg, \tag{43}$$

donde y_0 es la porción del sólido que está sumergida inicialmente. En la ecuación (43) estamos suponiendo que el eje OY coincide con la dirección del peso. Cuando se empuja el bloque hacia abajo, el empuje pasa a tomar otro valor, E, debido a que la porción de cuerpo sumergida es mayor. Al soltar el bloque, la ecuación de movimiento pasa a ser

$$E - mg = \rho_f ac(b - y)g - mg = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

esto es, teniendo en cuenta (43),

$$\rho_f ac(b - y)g - \rho_f ac(b - y_0)g = -\rho_f ac(y - y_0)g = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

o bien, teniendo en cuenta que $m = \rho abc$, donde ρ es la densidad de la madera,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\rho_f}{\rho}\frac{g}{b}(y - y_0),$$

que podemos escribir también como

$$\frac{d^2\Delta y}{dt^2} = -\frac{\rho_f}{\rho}\frac{g}{b}\Delta y, \tag{44}$$

donde $\Delta y = y - y_0$. La ecuación (44) es la ecuación de un M. A. S. de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho}\frac{g}{b}},$$

donde $b = 8$ cm, y periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{\rho_f}\frac{b}{g}}$$

En nuestro caso, numéricamente, es

$$\boxed{T = 0.40 \text{ s}}$$

Problema 2.15

Un sistema masa-muelle amortiguado lineal oscila con una frecuencia de 200 Hz. La constante de tiempo del sistema es de 2 s. En el instante $t = 0$, la amplitud de oscilación es de 6 cm, y la energía del sistema es de 60 J. Calcular

a) la amplitud de oscilación para $t = 2$ s y para $t = 4$ s.

b) la cantidad de energía que se disipa en cada intervalo de 2 s.

a) En un MAS amortiguado, la amplitud varía en el tiempo como

$$A(t) = A_0 e^{-t/2\tau},$$

donde τ es la constante de tiempo del sistema. Entonces, para $t = 2$ s,

$$\boxed{A(2 \text{ s}) = A_0 e^{-0.5} = 3.64 \text{ cm},}$$

y para $t = 4$ s,

$$\boxed{A(4 \text{ s}) = A_0 e^{-1} = 2.21 \text{ cm}}$$

b) La energía del MAS amortiguado, por su parte, es

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 e^{-t/\tau},$$

esto es

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}$$

En los instantes $t = 2$ s y $t = 4$ s se tiene entonces

$$E(2 \text{ s}) = E_0 e^{-1} = 22.07 \text{ J}$$

$$E(4 \text{ s}) = E_0 e^{-2} = 8.07 \text{ J},$$

respectivamente. La energía disipada en cada intervalo es entonces

$$\boxed{\Delta E(0 \text{ - } 2 \text{ s}) = E_0\left(1 - e^{-1}\right) = 37.93 \text{ J}}$$

y

$$\boxed{\Delta E(2 \text{ - } 4 \text{ s}) = E(2 \text{ s})\left(1 - e^{-1}\right) = 13.95 \text{ J}}$$

Problema 2.16

Un oscilador amortiguado tiene un periodo de 3 s, y su amplitud disminuye en un 5 % durante cada ciclo. Calcular

a) en cuánto disminuye la energía del oscilador en cada ciclo;

b) la constante de tiempo τ del oscilador;

c) su factor Q.

a) La energía de un oscilador amortiguado está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0 A^2(t),$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del oscilador no amortiguado, y es función del tiempo porque la amplitud $A(t)$ también lo es. La energía después de un ciclo es,

$$E(t+T) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2(t+T),$$

o bien, teniendo en cuenta que la amplitud cambia en una cantidad f tras un ciclo,

$$E(t+T) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2(t) f^2 = f^2 E(t),$$

donde $f = 0.95$ en nuestro caso. El cambio de energía en un ciclo es entonces

$$\boxed{\frac{E(t+T) - E(t)}{E(t)} = f^2 - 1 = -0.0975 = -9.75\,\%} \tag{45}$$

b) Por definición, la amplitud de un M. A. S. amortiguado está dada por

$$A(t) = A_0 e^{-t/2\tau},$$

donde A_0 es la amplitud inicial del movimiento y τ es la constante de tiempo del oscilador. En un ciclo,

$$A(T) = A_0 e^{-T/2\tau} = f A_0,$$

de donde, despejando

$$\boxed{\tau = -\frac{T}{2\ln f} = 29.24 \text{ s}}$$

c) Por definición, el factor Q del oscilador es

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{ciclo}},$$

donde $\Delta E/E$ está dado por (45). Entonces

$$\boxed{Q = 64.44}$$

Problema 2.17

Un oscilador amortiguado pierde el 3.5 % de su energía durante cada ciclo.

a) ¿Cuántos ciclos tienen que transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía?

b) ¿Cuál es el factor Q del sistema?

a) Según el enunciado,

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{ciclo} \equiv f = -0.035,$$

de modo que la energía tras el primer ciclo es

$$E_1 = (1+f)E_0,$$

siendo E_0 la energía inicial del M. A. S. amortiguado. Análogamente, tras el segundo ciclo,

$$E_2 = (1+f)E_1 = (1+f)^2 E_0,$$

de modo que, por recurrencia, la energía tras el n-ésimo ciclo es

$$E_n = (1+f)^n E_0 \tag{46}$$

Según (46), el número de ciclos tras el que la energía toma un cierto valor E_n verifica

$$n = \frac{\ln E_n/E_0}{\ln(1+f)}$$

En nuestro caso, con $E_n = 0.5E_0$,

$$\boxed{n = 19.46 \approx 19}$$

b) El factor Q es, por definición,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)},$$

es decir, numéricamente,

$$\boxed{Q = 179.52}$$