Física II

Relación 1: Momento angular y rotación

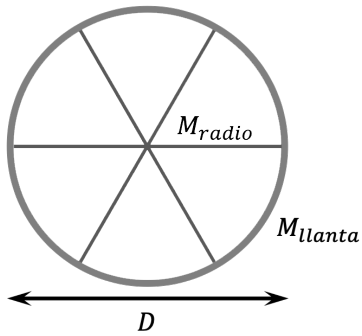
Juan J. Meléndez

Problema 1.1

Una rueda de vagón de 1.0 m de diámetro está formada por una llanta delgada de masa 8 kg y seis radios, cada uno de los cuales de 1.2 kg de masa. Determinar el momento de inercia de la rueda con respecto a su eje de rotación.

La inercia a la rotación de la rueda de vagón proviene de la llanta y de los radios. El momento de inercia de la rueda es entonces

$$I = I_{llanta} + 6 \times I_{radio} \tag{1}$$



El momento de inercia de la llanta, cuya masa podemos suponer concentrada a una distancia $R = D/2$, donde D es el diámetro de la rueda, del eje de rotación, es

$$I_{llanta} = M_{llanta} R^2$$

Por otra parte, cada radio se puede considerar como una varilla delgada que gira con respecto a un eje que pasa por su extremo. El momento de inercia de una varilla con respecto a un eje que pasa por su centro de masas es $\frac{1}{12} M_{radio} L^2$, donde L es la longitud de la varilla; por otra parte, el extremo de la varilla está a una distancia $L/2$ del centro de masas. El momento de inercia de la varilla con respecto a su extremo es entonces, según el teorema de Steiner,

$$I = I_{CM} + M_{radio} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M_{radio} L^2 + M_{radio} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M_{radio} L^2$$

es decir, en nuestro caso,

$$I_{radio} = \frac{1}{3} M_{radio} R^2$$

En definitiva, el momento de inercia de la llanta es, según (1)

$$I = M_{llanta} R^2 + 6 \times \frac{1}{3} M_{radio} R^2 = (M_{llanta} + 2M_{radio}) R^2$$

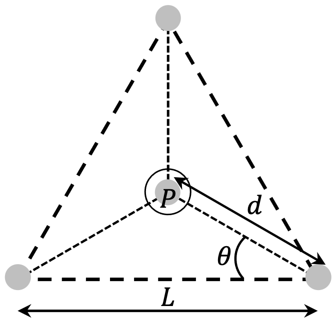
es decir, numéricamente,

$$\boxed{I = 2.6 \text{ kg·m}^2}$$

Problema 1.2

La molécula de metano (CH_4) tiene cuatro átomos de hidrógeno localizados en los vértices de un tetraedro regular de lado 0.18 nm, con el átomo de carbono en el centro. Determinar el momento de inercia de esta molécula respecto a un eje de rotación que pase a través del átomo de carbono y uno de los átomos de hidrógeno.

Consideremos la configuración de la figura de la derecha, que representa la proyección del tetraedro que representa a la molécula de metano sobre su base. En esta figura, los átomos de hidrógeno se representan como esferas grises, y el átomo de carbono como una esfera hueca. Un eje que pase por el átomo de carbono y uno de los hidrógenos pasa por el punto P de la figura, que está en el plano definido por los otros tres hidrógenos. Además, este punto P está a la misma distancia d de los tres hidrógenos del plano, que verifica



$$\cos\theta = \frac{L/2}{d} = \frac{L}{2d},$$

de modo que

$$d = \frac{L}{2\cos\theta} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

El momento de inercia que pide el enunciado es entonces

$$I = 3 \times md^2 = mL^2,$$

donde m es la masa del átomo de hidrógeno ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg). El valor numérico, con $L = 0.18 \cdot 10^{-9}$ m, es

$$\boxed{I = 5.41 \cdot 10^{-47}\ \text{kg}{\cdot}\text{m}^2}$$

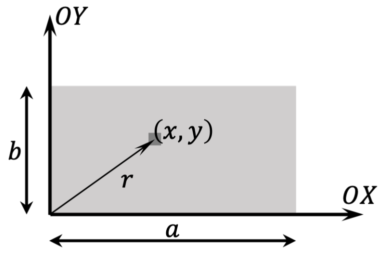
Problema 1.3

Una placa rectangular uniforme de lados a y b tiene masa m.

a) Demostrar que su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la placa que pasa por uno de sus vértices es $\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$.

b) Calcular el momento de inercia de la placa con respecto a un eje perpendicular a ella que pasa por su centro de masas.

a) Consideremos un elemento de superficie de la chapa $dxdy$ situado en la posición (x, y), como se indica en la figura de la derecha. La masa de ese elemento es $\sigma dS = \sigma dxdy$, donde σ es la densidad de la chapa. Su contribución al momento de inercia es entonces



$$dI = dmr^2 = (x^2 + y^2)\sigma dxdy,$$

de modo que el momento de la chapa es

$$I = \int_0^a \int_0^b (x^2 + y^2)\sigma dxdy$$

Esto es,

$$\begin{aligned} I &= \sigma \int_0^a \left[\int_0^b (x^2+y^2)dy\right] dx = \sigma \int_0^a \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b dx = \sigma \int_0^a \left(x^2b + \frac{b^3}{3}\right) dx = \\ &= \sigma\left(\frac{x^3b}{3} + \frac{b^3}{3}x\right)\Bigg|_0^a = \frac{\sigma}{3}\left(a^3b + ab^3\right) = \frac{\sigma}{3}ab(a^2+b^2) \end{aligned} \tag{2}$$

Tengamos en cuenta ahora que, si la chapa es homogénea,

$$\sigma = \frac{m}{ab},$$

de modo que, sustituyendo en (2), resulta finalmente

$$\boxed{I = \frac{1}{3}m(a^2+b^2),}$$

como queríamos demostrar.

b) El centro de masas de la chapa está en su centro geométrico, es decir, en el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, cuya distancia al origen verifica

$$d^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

Teniendo en cuenta el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de la chapa con respecto al centro de masas, I_{CM}, y respecto a un eje paralelo a él, I, están relacionados mediante

$$I = I_{CM} + md^2$$

Entonces

$$I_{CM} = I - md^2,$$

donde I es el momento de inercia calculado en el apartado anterior. Entonces

$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{3}m(a^2+b^2) - \frac{1}{4}m(a^2+b^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)}$$

Problema 1.4

La densidad de la Tierra no es uniforme, sino que varía con la distancia al centro como

$$\rho(r) = C\left(1.22 - \frac{r}{R}\right),$$

donde R es el radio de la Tierra y C es una constante. Calcular

a) La constante C en función de la masa de la Tierra M y su radio;

b) el momento de inercia de la Tierra.

a) Por definición, la masa M de la Tierra se puede calcular como

$$M = \iiint \rho(r)dV = 4\pi C\int_0^R \left(1.22 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr,$$

teniendo en cuenta que $\rho(r)$ tiene simetría esférica. Entonces

$$M = 4\pi C\left(\frac{1.22}{3}R^3 - \frac{1}{4R}R^4\right) = 4\pi CR^3\left(\frac{1.22}{3} - 0.25\right) = 0.157\cdot 4\pi CR^3,$$

de donde

$$\boxed{C = \frac{1}{4\pi}\frac{M}{0.157R^3} = \frac{6.383}{4\pi}\frac{M}{R^3}} \tag{3}$$

b) El momento de inercia de la Tierra, por definición, es

$$I = \int r^2 dm = \iiint \rho(r) r^2 dV = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^4 dr,$$

donde hemos tenido en cuenta de nuevo la simetría esférica de la densidad. Entonces

$$I = 4\pi C \int_0^R \left(1.22 - \frac{r}{R}\right) r^4 dr = 4\pi C \left(\frac{1.22}{5} R^5 - \frac{1}{6R} R^6\right) = 4\pi C \times 0.077 R^5,$$

o bien, utilizando (3),

$$\boxed{I = 0.491 M R^2}$$

Problema 1.5

Una partícula de 3 kg de masa se mueve en el plano OXY con velocidad $\vec{v} = 3\hat{\imath}$ (m/s) a lo largo de la línea $y = 5.3$ m.

a) Calcular el momento angular de la partícula relativo al origen cuando la partícula está en el punto $P = (12,\, 5.3)$ m.

b) Se aplica sobre la partícula una fuerza $\vec{F} = -3.9\hat{\imath}$ (N). Determinar el momento producido por esta fuerza cuando la partícula pasa por el punto P.

a) Por definición, el momento angular de una partícula de masa m, velocidad $\vec{v}$ en la posición $\vec{r}$ es

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m \left[(yv_z - zv_y)\hat{\imath} + (zv_x - xv_z)\hat{\jmath} + (xv_y - yv_x)\hat{k}\right]$$

En nuestro caso

$$\vec{L} = -myv_x\hat{k},$$

es decir, numéricamente

$$\boxed{\vec{L} = -47.7\hat{k}\ (\text{kg·m}^2/\text{s})}$$

b) El momento de una fuerza $\vec{F}$ en una posición $\vec{r}$, también por definición, es

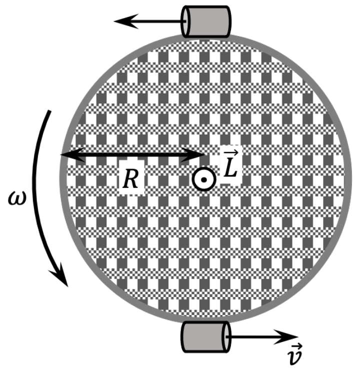
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left[(yF_z - zF_y)\hat{\imath} + (zF_x - xF_z)\hat{\jmath} + (xF_y - yF_x)\hat{k}\right]$$

En nuestro caso

$$\boxed{\vec{M} = -yF_x\hat{k} = 20.67\hat{k}\ (\text{N·m})}$$

Problema 1.6

Una nave espacial en forma de cono gira a 6 rev/min, y sus ocupantes quieren detenerla con dos pequeñas toberas diametralmente opuestas montadas en el contorno de la nave a una distancia $R = 3$ m del eje de rotación. Cada una de las toberas lanza un chorro de 10 g/s de gas a una velocidad de 800 m/s. En vuelo, el momento de inercia del vehículo alrededor de su eje es de 4000 kg·m^2. Calcular durante cuánto tiempo deben estar funcionando estas toberas para detener la rotación del vehículo.



Consideremos la situación de la figura de la derecha, que representa una nave espacial girando con velocidad angular ω; esta nave espacial tiene un cierto momento angular $\vec{L}$, que es perpendicular al plano del papel y está orientado hacia fuera. Cada tobera, situada en el borde exterior de la nave, expele gas con una cierta velocidad $\vec{v}$. La expulsión de este gas a chorro durante un cierto tiempo produce un *impulso*, es decir, una fuerza. Esta fuerza, a su vez, produce un momento de fuerza que, tal como están orientadas las toberas, es antiparalelo al momento angular $\vec{L}$. Así pues, el momento del impulso de las toberas tiende a detener la rotación de la nave.

El impulso generado en cada tobera está dado por

$$J = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v = \dot{m}v,$$

donde $\dot{m}$ es el ritmo de expulsión de gas. El momento de fuerzas neto generado en las toberas es, por tanto

$$M = 2JR = -2\dot{m}vR,$$

donde hemos tomado como positivo el sentido de $\vec{L}$, y se verifica

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = M = -2\dot{m}vR$$

Entonces

$$I\omega_f - I\omega_i = -\omega_i = -2\dot{m}vR\Delta t,$$

de donde

$$\Delta t = \frac{I\omega_i}{2\dot{m}vR},$$

con

$$\omega_i = 6\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 6\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}2\pi\frac{\text{rad}}{\text{rev}}\frac{1}{60}\frac{\text{min}}{\text{s}} = \frac{\pi}{5}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0.63\ \text{s}^{-1}$$

Numéricamente, es

$$\boxed{\Delta t = 52.4\ \text{s}}$$

Problema 1.7

a) Suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea de radio R y masa M, demostrar que el periodo de rotación terrestre alrededor de su eje, T, está dado por $T = bR^2$, donde $b = \frac{4}{5}\pi\frac{M}{L}$ y L es el momento angular de la Tierra debido a su rotación.

b) Suponer que el radio r cambia en una cantidad pequeña Δr debido a algún efecto interno (como la dilatación térmica). Demostrar que el periodo de la Tierra cambia en una cantidad ΔT tal que $\Delta T/T = 2\Delta R/R$.

c) Calcular cuánto tendría que aumentar el radio de la Tierra para que el periodo de rotación cambiase en 0.25 días/año, de forma que los años bisiestos no fueran necesarios.

a) La Tierra es un sistema aislado. La fuerza que ejerce el Sol sobre ella es central y, por tanto, no produce ningún momento de fuerza. Así pues, el momento angular total de la Tierra permanece constante. Entonces, suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea de radio R y masa M,

$$L = I\omega = I\frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5}MR^2\frac{2\pi}{T},$$

de donde

$$\boxed{T = \frac{4}{5}\pi\frac{M}{L}R^2 \equiv bR^2,} \tag{4}$$

con

$$b = \frac{4}{5}\pi\frac{M}{L},$$

como queríamos demostrar.

b) Supongamos entonces que el radio de la tierra cambia en una cantidad ΔR; en tal caso, el periodo de rotación cambia también en una cantidad ΔT que podemos calcular diferenciando (4). Así,

$$\Delta T = \frac{4}{5}\pi\frac{M}{L}2R\Delta R$$

Entonces

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\frac{4}{5}\pi\frac{M}{L}2R\Delta R}{\frac{4}{5}\pi\frac{M}{L}R^2},$$

esto es,

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta R}{R},} \tag{5}$$

como queríamos demostrar.

c) Despejando ΔR de (5) se tiene

$$\Delta R = \frac{R}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

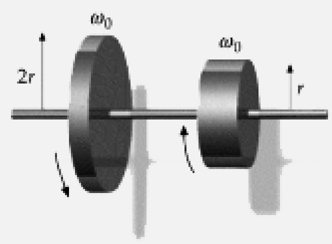
Si el cambio del período es $\Delta T = 0.25$ días, entonces

$$\boxed{\Delta R = 0.000342R = 2.18 \text{ km},}$$

donde hemos tomado $R = 6371$ km.

Problema 1.8

Dos discos de igual masa y radios r y $2r$ giran sobre cojinetes sin rozamiento a la misma velocidad angular ω_0, pero en sentidos opuestos, como se indica en la figura. Los dos discos son lentamente impulsados el uno contra el otro, hasta que sus superficies entran en contacto y, eventualmente, ambos giran con la misma velocidad angular ω. Calcular el módulo de ω y el cambio de energía cinética de rotación del sistema.



Inicialmente, los dos discos giran en sentidos contrarios, de manera que sus momentos angulares son opuestos. Si tomamos como positivo el sentido del momento angular del disco de radio $2r$, el momento angular total del sistema es

$$L_i = I_1\omega_0 - I_2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}M(2r)^2 - \frac{1}{2}Mr^2\right)\omega_0 = \frac{3}{2}Mr^2\omega_0,$$

donde I_1 y I_2 denotan, respectivamente, los momentos de inercia de los discos de radios $2r$ y r. Puesto que los discos se acercan lentamente por una barra con la que no existe rozamiento, no hay ningún momento de fuerza ejercido sobre el sistema y, por tanto, el momento angular se conserva. De esta forma, cuando los discos están unidos entre sí, el momento angular del sistema es

$$L_f = I\omega,$$

donde ω es la velocidad angular común cuando los discos están unidos y I es el momento angular de los discos unidos, que está dado por

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5}{2}Mr^2$$

Entonces

$$L_i = L_f,$$

de donde

$$\boxed{\omega = \frac{3}{5}\omega_0}$$

Por otra parte, la energía cinética inicial del sistema es

$$K_i = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_0^2 = \frac{5}{4}Mr^2\omega_0^2,$$

y la energía final

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{9}{20}Mr^2\omega_0^2,$$

de manera que

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = -\frac{4}{5}Mr^2\omega_0^2}$$

Problema 1.9

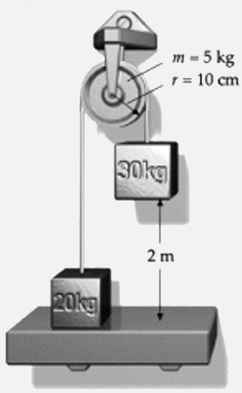
El sistema de la figura se deja libre desde el reposo. Suponiendo que la cuerda, sin masa, no desliza sobre la polea, calcular

a) la velocidad del cuerpo de 30 kg justo antes de que toque la plataforma;

b) la velocidad angular de la polea en ese instante;

c) las tensiones de las cuerdas; y

d) el tiempo que tarda el cuerpo de 30 kg en alcanzar la plataforma.



a) Tomemos como inicial la configuración en la que las masas y la polea están en reposo, y la masa de 30 kg se encuentra a una cierta altura sobre la plataforma. Tomando como origen de energía potencial esta plataforma, la energía mecánica inicial es entonces

$$E_{m,i} = m_2 g h, \tag{6}$$

donde $m_2 = 30$ kg y $h = 2$ m. Justo cuando la masa m_2 va a tocar la plataforma, ambas masas y la polea se encuentran en movimiento. La energía cinética del sistema es entonces, en esa configuración, que llamaremos final,

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

donde $m_1 = 20$ kg, v es la velocidad común de ambas masas, I es el momento de inercia de la polea y ω es su velocidad angular, que se relaciona con v como

$$\omega = \frac{v}{r}, \tag{7}$$

donde $r = 0.1$ m es el radio de la polea. Por otra parte, cuando m_2 está a punto de tocar la superficie, la masa m_1 se situará a una distancia h por encima de ella, porque la cuerda es inextensible. En consecuencia, la energía mecánica final del sistema es

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 g h \tag{8}$$

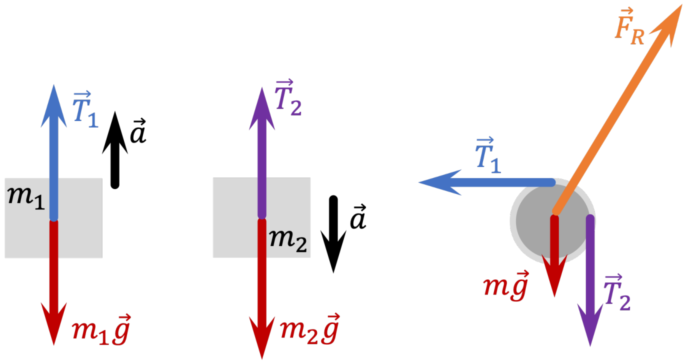
Igualando (6) y (8), y teniendo en cuenta que $I = \frac{1}{2}mr^2$, donde $m = 5$ kg es la masa de la polea, resulta

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g h} = 2.73 \text{ m/s}}$$

b) Teniendo en cuenta la relación (7), la velocidad angular de la polea es

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} = 27.3 \text{ s}^{-1}}$$

c) Para calcular las tensiones que actúan sobre las masas m_1 y m_2 tenemos que considerar las fuerzas que actúan sobre ellas y sobre la polea; estas fuerzas se representan en la siguiente figura:



Para las masas m_1 y m_2, la segunda ley de Newton indica, respectivamente,

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \tag{9}$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \tag{10}$$

donde a es la aceleración común a ambas. Por otra parte, las tensiones T_1 y T_2 tienen momentos no nulos sobre la polea, y se verifica

$$(T_2 - T_1)r = I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r} = \frac{1}{2}mra$$

Sumando estas tres ecuaciones y despejando, la aceleración del sistema resulta

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}g = 1.87 \text{ m/s}^2 \tag{11}$$

Sustituyendo ahora en las ecuaciones (9) y (10) resulta, respectivamente,

$$\boxed{T_1 = m_1(a+g) = 233.4 \text{ N}}$$

$$\boxed{T_2 = m_2(g-a) = 237.9 \text{ N}}$$

d) Finalmente, el tiempo que tarda la masa m_2 en caer se puede calcular teniendo en cuenta que el movimiento es uniformemente acelerado y que, además, m_2 parte del reposo. Entonces

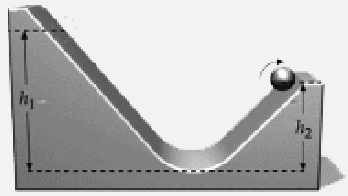
$$h = \frac{1}{2}at^2,$$

de donde

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1.46 \text{ s}}$$

Problema 1.10

Consideremos una bolita de masa M y radio R situada en la pista de la figura de la derecha. La bolita rueda sin deslizamiento hacia abajo por la pendiente de la izquierda desde una altura h_1, y luego desliza sin rodar por la pendiente derecha hasta una altura h_2. Suponiendo que en la pendiente derecha no existe rozamiento con la pista, calcular h_2.



El movimiento de la bolita es distinto en el plano izquierdo y en el derecho. En el primero, la bolita rueda, sin deslizamiento. Por otra parte, en el plano derecho no hay rozamiento, de manera que la bolita no puede rodar, sino solo deslizar. En cualquier caso, la energía se conserva en el proceso, puesto que no hay deslizamiento por el plano de la izquierda. Tomando como origen de energía potencial el punto más bajo de la trayectoria, durante la rodadura por el plano de la izquierda se verifica

$$Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{12}$$

donde el miembro de la izquierda es la energía mecánica del sistema en el punto de partida y el miembro de la derecha es la energía en el punto más bajo de la trayectoria. En (12), v y ω son, respectivamente, la velocidad lineal y la angular de la bolita en el punto más bajo de la trayectoria. Sustituyendo los valores $I = \frac{2}{5}MR^2$ y $\omega = \frac{v}{R}$ resulta

$$Mgh_1 = \frac{7}{10}Mv^2,$$

esto es,

$$v^2 = \frac{10}{7}gh_1 \tag{13}$$

A partir del punto más bajo de la trayectoria, la bolita no rueda, de manera que la energía en el punto más bajo de la trayectoria es sólo de traslación. Así, se verifica en el plano de la derecha

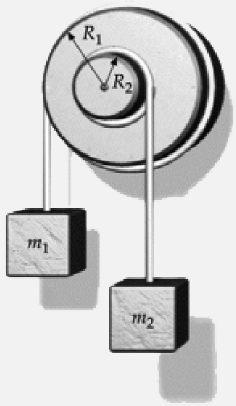
$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_2,$$

de donde, teniendo en cuenta (13),

$$\boxed{h_2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = \frac{5}{7}h_1}$$

Problema 1.11

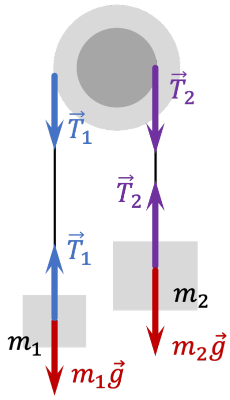
Dos objetos cuelgan de dos cuerdas unidas a sendas ruedas capaces de girar respecto a un mismo eje, como se muestra en la figura. El momento de inercia total de las dos ruedas es 40 kg·m^2, y los radios son $R_1 = 1.2$ m y $R_2 = 0.4$ m.



a) Si $m_1 = 24$ kg, calcular el valor de m_2 necesario para que la aceleración angular de las ruedas sea nula.

b) Si se colocan con suavidad 12 kg sobre m_1, calcular la aceleración angular de las ruedas y la tensión en las cuerdas.

a) Las fuerzas que actúan sobre el sistema, obviando el peso de la polea y la fuerza de reacción en este, son las que se representan en la figura de la derecha. Si la aceleración angular de la polea es nula, entonces también lo son las aceleraciones de las masas m_1 y m_2, de manera que se verifica



$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 g \\ T_2 &= m_2 g, \end{aligned} \tag{14}$$

Por otra parte, los momentos de fuerza creados por las tensiones T_1 y T_2, que llamaremos M_1 y M_2, son de sentidos opuestos. Si la aceleración angular de la polea es cero, entonces

$$M_1 = M_2, \tag{15}$$

con

$$M_1 = T_1 R_1 = m_1 g R_1$$

y

$$M_2 = T_2 R_2 = m_2 g R_2,$$

donde hemos tenido en cuenta (**??**). Sustituyendo en (15) y despejando m_2 resulta entonces

$$\boxed{m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 72 \text{ kg}}$$

b) Si se coloca una cierta masa Δm sobre m_1, el sistema ya no tiene aceleración angular nula y, por tanto, las masas m_1 y m_2 tienen sendas aceleraciones a_1 y a_2. La segunda ley de Newton se escribe entonces

$$\begin{aligned} (m_1 + \Delta m)g - T_1 &= (m_1 + \Delta m)a_1 \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a_2 \end{aligned} \tag{16}$$

y, para la rotación,

$$T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha, \tag{17}$$

donde I es el momento de inercia de la polea y α es su aceleración angular, que se relaciona con las aceleraciones a_1 y a_2 como

$$\alpha = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} \tag{18}$$

Teniendo en cuenta (18), las ecuaciones (16) llevan a

$$\begin{aligned} T_1 &= (m_1 + \Delta m)(g - R_1\alpha) \\ T_2 &= m_2(g + R_2\alpha) \end{aligned} \tag{19}$$

y, sustituyendo en (17),

$$(m_1 + \Delta m)(g - R_1\alpha)R_1 - m_2(g + R_2\alpha)R_2 = I\alpha,$$

de donde

$$\boxed{\alpha = \frac{(m_1 + \Delta m)gR_1 - m_2 g R_2}{I + (m_1 + \Delta m)R_1^2 + m_2 R_2^2} = 1.36\ \mathrm{s}^{-2}}$$

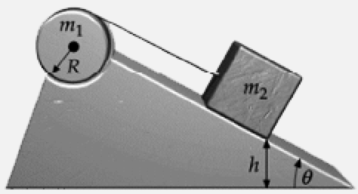
Las tensiones se calculan entonces a partir de (19):

$$\boxed{T_1 = (m_1 + \Delta m)g \left[\frac{I + m_2 R_2(R_1 + R_2)}{I + (m_1 + \Delta m)R_1^2 + m_2 R_2^2}\right] = 293.8\ \mathrm{N}}$$

$$\boxed{T_2 = m_2 g \left[\frac{I + (m_1 + \Delta m)R_1(R_1 + R_2)}{I + (m_1 + \Delta m)R_1^2 + m_2 R_2^2}\right] = 744.9\ \mathrm{N}}$$

Problema 1.12

Un cilindro uniforme de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Alrededor del mismo se enrolla una cuerda conectada a un bloque de masa m_2, que está apoyado en un plano inclinado un ángulo θ con el que no hay rozamiento. El sistema se deja en libertad desde el reposo cuando la masa m_2 se encuentra a una altura h sobre la base del plano inclinado. Calcular

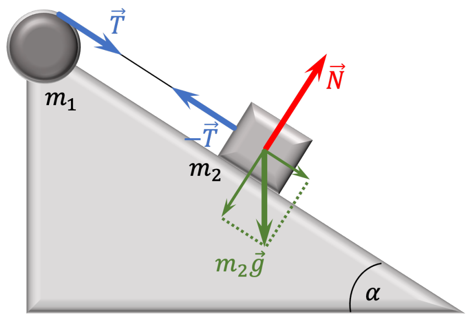


a) la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda;

b) la velocidad del bloque cuando llega al final del plano.

c) Analizar las respuestas para los casos extremos $\theta = 0$, $\theta = 90^{\circ}$ y $m_1 = 0$.

a) Las fuerzas que actúan sobre la masa m_2 y sobre el cilindro son las de la figura de la derecha. Para la masa m_2, la segunda ley de Newton se escribe entonces como



$$m_2 g\cos\theta - N = 0$$
$$m_2 g\sin\theta - T = m_2 a, \qquad (20)$$

donde a es la aceleración de esa masa. Por otra parte, la aceleración del cilindro se debe al momento ejercido por la tensión de la cuerda. La ecuación de rotación es

$$TR = I\alpha = \frac{1}{2}m_1 R^2\alpha,$$

donde $I = \frac{1}{2}m_1 R^2$ y

$$\alpha = \frac{a}{R},$$

de manera que

$$T = \frac{1}{2}m_1 a \qquad (21)$$

Sustituyendo en (20) y despejando, resulta entonces

$$\boxed{a = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{m_1}{2m_2}}} \tag{22}$$

y, de (21),

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\frac{m_1 g\sin\theta}{1+\dfrac{m_1}{2m_2}}} \tag{23}$$

b) Si no hay rozamiento, las fuerzas que actúan en el problema son conservativas, de manera que la energía mecánica del sistema se conserva. Consideremos la situación inicial en la que el bloque de masa m_2 se encuentra a una altura h de la base del plano. Tomando que la energía potencial gravitatoria es cero en esa base, la energía mecánica inicial del sistema es

$$E_{m,i} = m_2 gh,$$

puesto que tanto el bloque como el cilindro están en reposo. Cuando el bloque llega al suelo, su energía potencial gravitatoria es cero; por otra parte, el bloque tiene una cierta energía cinética de traslación, y el cilindro del que pende tiene una energía cinética de rotación. La energía mecánica cuando el bloque llega al final del plano es entonces

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

donde v es la velocidad de traslación de m_2 y ω es la velocidad angular del cilindro, que verifica

$$\omega = \frac{v}{R}$$

La conservación de la energía implica

$$E_{m,i} = E_{m,f},$$

es decir,

$$m_2 gh = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1 R^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2}m_1\right)v^2$$

Entonces, despejando,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\dfrac{m_1}{2m_2}}}}$$

c) Si $\theta = 0$, las ecuaciones (22) y (23) dan

$$a = 0$$

y

$$T = 0,$$

que indica que el cuerpo de masa m_2 no se mueve. En efecto, eso es lo que cabría esperar si el plano no está inclinado, y m_2 está apoyado en una superficie horizontal. Por otra parte, si $\theta = 90^{\text{o}}$,

$$a = \frac{g}{1+\dfrac{m_1}{2m_2}}$$

y

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_1 g}{1 + \dfrac{m_1}{2m_2}},$$

que corresponde a m_2 cayendo verticalmente sin rozamiento. Finalmente, el caso $m_1 = 0$ da

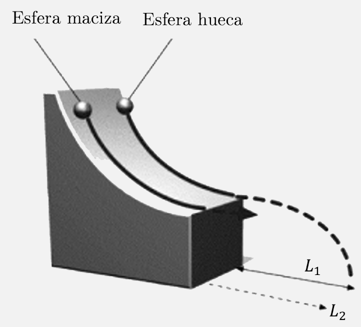
$$a = g\sin\theta$$

$$T = 0,$$

que corresponden a la situación en la que m_2 cae por el plano sin ningún efecto de la polea cilíndrica.

Problema 1.13

Una esfera hueca y otra sólida (y uniforme) de igual masa m e igual radio R ruedan sin deslizamiento por una rampa desde la misma altura H de forma que ambas se mueven horizontalmente al abandonar la rampa. Calcular el cociente entre las distancias a las que ambas esferas golpean contra el suelo.



Consideremos la situación en la que las dos esferas están en reposo en la parte superior de la rampa, a una altura H. Si definimos el origen de energía potencial gravitatoria en el suelo, entonces ambas esferas tienen una energía mecánica igual a su energía potencial gravitatoria a esa altura H. Es decir,

$$E^i_{m,1} = E^i_{m,2} = mgH,$$

donde m es la masa de las dos esferas. Cuando llegan a la parte inferior de la rampa, a una cierta altura h, las dos esferas tienen, por una parte, energía potencial gravitatoria y, por otra, energías cinéticas de traslación y de rotación. En particular, sus energías al llegar al borde de la rampa son

$$E^f_{m,1} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

y

$$E^f_{m,2} = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2,$$

donde v_i, I_i y ω_i son, respectivamente, la velocidad del centro de masas, el momento de inercia y la velocidad angular de cada esfera; en particular,

$$\omega_i = \frac{v_i}{R},$$

y

$$I_i = k_i m R^2,$$

donde $k = \frac{2}{3}$ para una esfera hueca y $k = \frac{2}{5}$ para una esfera maciza. En definitiva,

$$E^f_{m,1} = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{v_1^2}{R^2} = mgh + \frac{1}{2}m(1+k_1)v_1^2$$

y

$$E^f_{m,2} = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_2\frac{v_2^2}{R^2} = mgh + \frac{1}{2}m(1+k_2)v_2^2$$

En ausencia de rozamiento, las energías inicial y final son iguales para cada esfera, de modo que

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}m(1+k_1)v_1^2$$

y

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}m(1+k_2)v_2^2,$$

o bien

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+k_1}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+k_2}} \end{aligned} \tag{24}$$

Cuando llegan al final de la rampa, las dos esferas describen un movimiento parabólico, cada una de ellas con una velocidad inicial horizontal. El tiempo que tardan en caer es independiente de la velocidad de cada esfera, y está dado por

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

y el alcance horizontal de cada bola es

$$L_i = v_i\hat{t},$$

donde v_1 y v_2 están dadas por (24). En definitiva, el cociente entre los alcances de las dos esferas es

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1+k_2}{1+k_1}}$$

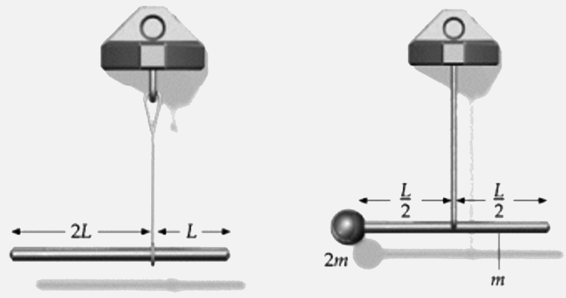
Si los subíndices 1 y 2 denotan a las bolas huecas y maciza, respectivamente, se tiene entonces

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = 0.916}$$

Problema 1.14

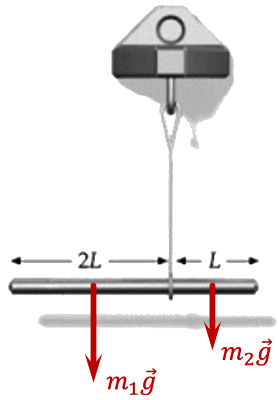
a) Una barra uniforme de longitud $3L$ pivota como se indica en la figura *a*) y se mantiene en posición horizontal. Calcular la aceleración angular inicial de la barra cuando se suelta.

b) Considerar ahora una barra uniforme de longitud L que pivota en torno a su punto medio, como se indica en la figura b). Se acopla a un extremo de la barra una carga de masa $2m$. Si se suelta el sistema desde la posición horizontal, calcular la máxima velocidad de la carga acoplada.



a) b)

a) Las fuerzas que actúan sobre la barra son las que se indican en la figura. A la izquierda del eje de giro actúa el peso de la porción de la barra de longitud $2L$, y a la derecha actúa el peso de la porción de longitud L, y ambas fuerzas están aplicadas en los respectivos centros de masas. Además, los momentos de fuerza generados por estos pesos son de sentidos opuestos, y se verifica entonces



$$m_1 g L_1 - m_2 g L_2 = I\alpha, \tag{25}$$

donde L_1 y L_2 son las distancias de los centros de masas de las dos porciones de la barra al eje de giro, I es el momento de inercia de la barra con respecto al eje de rotación y α es la aceleración angular inicial de la barra.

Según la figura, $L_1 = L$ y $L_2 = \frac{L}{2}$. Por otra parte, puesto que la barra es homogénea,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2}{3}m \\ m_2 &= \frac{1}{3}m, \end{aligned} \tag{26}$$

donde m es la masa de la barra. Finalmente, el eje de giro se sitúa a una distancia $d = \frac{L}{2}$ del centro de masas de la barra. Según el teorema de Steiner,

$$I = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{12}m(3L)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2 \tag{27}$$

En definitiva, sustituyendo (26) y (27) en (25) resulta

$$\frac{2}{3}mgL - \frac{1}{3}mg\frac{L}{2} = mL^2\alpha,$$

de donde, despejando, resulta

$$\boxed{\alpha = \frac{g}{2L}}$$

b) Consideremos la situación en la que la barra y la pesa están en posición horizontal. Si tomamos esa configuración como cero de la energía potencial gravitatoria, la energía mecánica total del sistema es cero, porque todos sus elementos están en reposo. Así,

$$E_{m,i} = 0$$

La máxima velocidad corresponde a la situación en la que la pesa está en el punto más bajo de la trayectoria y la barra es vertical, que llamaremos configuración final. En tal caso, la energía potencial gravitatoria del sistema es únicamente la debida a la pesa, porque el centro de masas de la barra no ha cambiado de posición. Entonces

$$E_{p,f} = -(2m)g\frac{L}{2}$$

Por otra parte, la energía cinética del sistema es la suma de la energía de traslación de la pesa y de la de rotación de la barra:

$$K_f = \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

donde v es la velocidad máxima de la pesa, $I = \frac{1}{12}mL^2$ es el momento de inercia de la barra y ω es su velocidad angular, que se relaciona con v a través de

$$\omega = \frac{v}{L/2}$$

En definitiva, la energía mecánica final del sistema es

$$E_{m,f} = mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{2v}{L}\right)^2 - mgL = \frac{7}{6}mv^2 - mgL$$

y se verifica

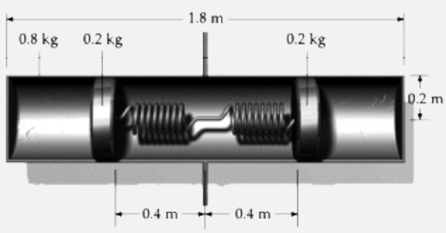
$$E_{m,f} = 0,$$

de donde

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{6gL}{7}}}$$

Problema 1.15

La figura muestra un cilindro hueco de 1.8 m de longitud, 0.2 m de radio y 0.8 kg de masa. El cilindro puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y es perpendicular al eje del cilindro. Dentro de éste existen dos masas de 0.2 kg cada una, conectadas a sendos muelles de constante k, longitudes naturales de 0.4 m y masas despreciables. Las paredes interiores del cilindro no tienen rozamiento.



a) Calcular el valor de la constante elástica de los muelles sabiendo que las masas están localizadas a 0.8 m del centro del cilindro cuando este gira a 24 rad/s.

b) Calcular el trabajo necesario para el sistema pase del reposo a una velocidad angular de 24 rad/s.

a) Cuando el sistema gira, la fuerza elástica que actúa sobre las masas ejerce el papel de fuerza centrípeta, de manera que se verifica

$$E_{elástica} = k\Delta x = m\frac{v^2}{d}, \tag{28}$$

donde $\Delta x = 0.4$ m es el alargamiento de los muelles, $m = 0.2$ kg, d es la distancia de las masas al eje de rotación y v es su velocidad, que se relaciona con la velocidad angular como

$$v = \omega d \tag{29}$$

Entonces, sustituyendo en (28) resulta

$$k\Delta x = md\omega^2,$$

de donde, despejando

$$\boxed{k = \frac{md\omega^2}{\Delta x} = 230.4 \text{ N/m}} \tag{30}$$

b) Por definición, el trabajo puesto en juego para que se produzca la rotación del sistema coincide con el incremento de energía mecánica en el mismo:

$$W = \Delta K + \Delta E_p, \tag{31}$$

donde ΔK se debe a la rotación del cilindro y de las masas en su interior, y ΔE_p es el cambio de energía potencial elástica en las masas conectadas a los muelles. Entonces

$$\Delta K = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

siendo I es el momento de inercia del cilindro hueco y de las masas:

$$I = \frac{1}{2} m_c R^2 + \frac{1}{12} m_c L^2 + 2I_m \tag{32}$$

Por otra parte, las masas conectadas a los muelles son discos, es decir, cilindros de altura menor que su radio. El momento de inercia de un cilindro de radio r y altura l con respecto a un eje perpendicular al eje del cilindro que pase por su centro es

$$I_c = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$$

En nuestro caso, $l \ll r$, y el radio del disco coincide con el radio interior del cilindro, de manera que

$$I_c \approx \frac{1}{4} mR^2$$

Pero los discos no giran en torno a uno de sus diámetros, sino respecto a un eje paralelo situado a una distancia d de ellos. Aplicando el teorema de Steiner, resulta

$$I_m = I_c + md^2 = \frac{1}{4} mR^2 + md^2$$

En definitiva, sustituyendo en (32) queda

$$I = \frac{1}{2} m_c R^2 + \frac{1}{12} m_c L^2 + \frac{1}{2} mR^2 + 2md^2$$

y el incremento de energía cinética

$$\Delta K = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(m + m_c)R^2 + \frac{1}{12} m_c L^2 + 2md^2 \right] \omega^2$$

Por otra parte,

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} k\Delta x^2,$$

donde k está dado por (30). En definitiva, sustituyendo en (31), resulta

$$W = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(m+m_c)R^2 + \frac{1}{12}m_cL^2 + 2md^2\right]\omega^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

esto es, numéricamente,

$$\boxed{W = 160.1 \text{ J}}$$

Problema 1.16

> En un pozo hay una polea cuyo tambor, con forma de disco, tiene masa m_t y radio R. Alrededor de la polea se enrolla un cable de masa m_c y longitud L, de donde cuelga un cubo de agua de masa m_b. Cuando el cubo está arriba, se suelta la polea y el cubo cae por el brocal del pozo. Calcular la velocidad a la que se mueve el cubo cuando ha caído una distancia $d < L$.

Consideremos la situación en la que el cubo está en la parte superior del brocal del pozo, y tomemos la energía potencial gravitatoria igual a cero en esa configuración. Puesto que el sistema se encuentra en reposo, la energía mecánica es igual a cero en esa configuración, que llamaremos inicial. Así pues

$$E_{m,i} = 0$$

Cuando el cubo ha caído una cierta distancia d por el brocal, situación que llamaremos final, se han producido varios cambios en la energía del sistema. En primer lugar, la polea está girando con una cierta velocidad angular ω, a la vez que el cubo y la cuerda se mueven con una cierta velocidad v. La energía cinética del sistema en la situación final es entonces

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(m_c+m_b)v^2,$$

donde

$$\omega = \frac{v}{R}$$

y

$$I = \frac{1}{2}m_tR^2$$

Por otra parte, el cubo ha caído una distancia d y la cuerda se ha desenrollado de la polea, lo que implica que la energía potencial gravitatoria de ambas ha cambiado. Teniendo en cuenta la elección de origen que hemos hecho, resulta

$$E_{p,f} = -m_bgd - m_c'gh,$$

donde m_c' es la masa de la cuerda que se ha desenrollado y h es la posición del centro de masas de la cuerda cuando el cubo ha bajado una cantidad d. Como la cuerda es homogénea, resulta

$$h = \frac{d}{2}$$

y, además, se verifica

$$\frac{m_c}{L} = \frac{m_c'}{d}, \tag{33}$$

de modo que

$$m_c' = m_c\frac{d}{L}$$

En definitiva, la energía mecánica final del sistema es

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_t + m_b + m_c\right)v^2 - \left(m_b + \frac{m_c'}{2}\right)gd$$

y, puesto que la energía se conserva en este movimiento,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_t + m_b + m_c\right)v^2 - \left(m_b + \frac{m_c'}{2}\right)gd = 0$$

de donde, simplificando y teniendo en cuenta (33), resulta

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2m_bL + m_cd}{\left(\frac{1}{2}m_t + m_b + m_c\right)L}gd}}$$

Problema 1.17

Un aro de 1.5 kg de masa y radio 65 cm tiene una cuerda enrollada a su circunferencia y está apoyado en posición plana sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Se tira de la cuerda con una fuerza de 5 N, y la cuerda no se desliza sobre el aro. Calcular

a) la distancia que recorre el centro del aro en 3 s;

b) la velocidad angular del aro respecto a su centro de masas al cabo de ese tiempo.

a) El aro está sometido a una fuerza constante F paralela al plano sobre el que se apoya, de manera que la aceleración de su centro de masas verifica

$$F = ma_{CM},$$

donde m es la masa del aro. Es decir,

$$a_{CM} = \frac{F}{m} = 3.33 \text{ m/s}^2$$

En un intervalo de tiempo Δt, el espacio recorrido por el aro en su movimiento uniformemente acelerado es

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{2}a_{CM}\Delta t^2 = 15 \text{ m}}$$

b) El aro gira instantáneamente en torno a un eje de rotación situado en el punto de contacto con el plano. El centro de masas del sistema, por otra parte, está siempre en la vertical de este punto de contacto, de manera que se verifica

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} = 5.13 \text{ s}^{-2},$$

de modo que la velocidad angular al cabo de un intervalo de tiempo Δt es

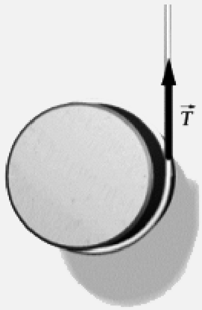
$$\boxed{\omega = \alpha\Delta t = 15.38 \text{ s}^{-1}}$$

Problema 1.18

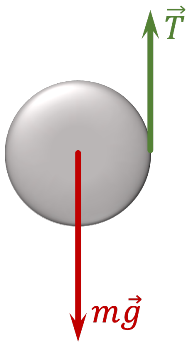
Un cilindro uniforme de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda fuertemente sujeta. El cilindro cae verticalmente, como se indica en la figura.

a) Demostrar que la aceleración del cilindro está dirigida hacia abajo, y que su módulo es $a = 2g/3$.

b) Calcular la tensión de la cuerda.



a) Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son las que aparecen en la figura de la derecha. De ellas, el peso $m\vec{g}$ no ejerce ningún momento de fuerza, mientras que $\vec{T}$ sí lo ejerce. La segunda ley de Newton se escribe entonces



$$mg - T = ma, \tag{34}$$

donde a es la aceleración del centro de masas del sistema. Por otra parte, para la rotación del cilindro se verifica

$$TR = I\alpha, \tag{35}$$

donde $I = \frac{1}{2}mR^2$ es el momento de inercia con respecto al eje de rotación y α es la aceleración angular del cilindro, que verifica

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Sustituyendo en (35) y despejando resulta

$$T = \frac{Ia}{R^2} = \frac{1}{2}ma$$

y sustituyendo en (34),

$$mg - \frac{1}{2}ma = ma,$$

de donde

$$\boxed{a = \frac{2}{3}g,}$$

como queríamos demostrar.

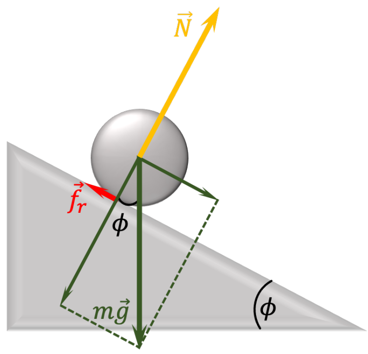
b) La tensión de la cuerda se calcula a partir de (34):

$$\boxed{T = m(g-a) = \frac{1}{3}mg}$$

Problema 1.19

Una esfera sólida uniforme rueda sin deslizar sobre un plano inclinado. Calcular la inclinación del plano si la aceleración del centro de masas de la esfera es $0.2g$.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera son las que se representan en la figura de la derecha. La segunda ley de Newton para el sistema se escribe entonces



$$mg\sin\phi - f_r = ma, \tag{36}$$

$$mg\cos\phi - N = 0$$

donde a es la aceleración del centro de masas del sistema. Por otra parte, la aceleración se debe al momento de la fuerza de rozamiento, y se verifica

$$f_r R = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha, \tag{37}$$

donde m y R son, respectivamente, la masa y el radio de la esfera y α es su aceleración angular, que se relaciona con a como

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

De (37) resulta entonces

$$f_r = \frac{2}{5}ma$$

y, sustituyendo en (36),

$$mg\sin\phi = ma + f_r = \frac{7}{5}ma,$$

de donde

$$\boxed{\phi = \arcsin\frac{7a}{5g} = 16.3}$$

Problema 1.20

Un cilindro macizo uniforme de madera rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo θ con el que tiene un coeficiente de rozamiento estático μ_e. Calcular

a) la aceleración del centro de masas del cilindro;

b) la fuerza de rozamiento que actúa sobre él;

c) el valor máximo del ángulo de inclinación del plano para el cual el cilindro rueda sin deslizamiento.

Las fuerzas que actúan sobre el cilindro que cae por el plano inclinado son las mismas que aparecen en la figura del problema 19.

a) La segunda ley de Newton se escribe entonces como

$$mg\sin\theta - f_r = ma \tag{38}$$
$$mg\cos\theta - N = 0, \tag{39}$$

donde m es la masa del cilindro y a es la aceleración de su centro de masas. Por otra parte, la única fuerza que ejerce momento sobre el cilindro es la fuerza de rozamiento, de manera que la ecuación que describe la rotación del cilindro es

$$f_r R = I\alpha = I\frac{a}{R},$$

donde R es el radio del cilindro, $I = \frac{1}{2}mR^2$ su momento de inercia y α su aceleración angular. De aquí,

$$f_r = \frac{I}{R^2}a \tag{40}$$

y, sustituyendo en (38),

$$mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}a = ma,$$

de donde, despejando, resulta

$$\boxed{a = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta}$$

b) La fuerza de rozamiento que actúa sobre el cilindro está dada por (40):

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{3}mg\sin\theta} \tag{41}$$

c) Si el cilindro rueda por el plano sin deslizar, la fuerza de rozamiento (41) debe ser menor que la fuerza de rozamiento estática, dada por

$$f_{r,s} = \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta \tag{42}$$

Si la fuerza de rozamiento (41) iguala el valor (42), la rotación de la bola no será capaz de compensar la acción del rozamiento y el objeto deslizar. Así, el valor máximo del ángulo θ para el que la bola no desliza verifica

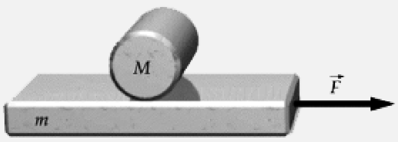
$$\mu_e mg\cos\theta_{máx} = \frac{1}{3}mg\sin\theta_{máx}$$

de donde, despejando,

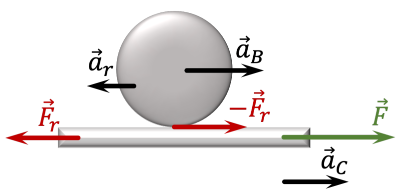
$$\boxed{\theta_{máx} = \arctan\left(3\mu_e\right)}$$

Problema 1.21

Un cilindro uniforme de masa M y radio R descansa sobre un bloque de masa m, el cual a su vez está en reposo sobre una mesa horizontal con la que no tiene rozamiento, como se indica en la figura. Al aplicar una fuerza horizontal $\vec{F}$ al bloque, éste acelera y el cilindro rueda sin deslizar. Determinar la aceleración del bloque.



Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la externa, $\vec{F}$, y la fuerza de rozamiento debida al cilindro que está sobre él, $\vec{F}_r$, que se opone al movimiento del bloque y tiene, por tanto, el sentido de la figura. Por otra parte, sobre el cilindro actúa la una fuerza igual en módulo a F_r, pero de sentido contrario. La segunda ley de Newton se escribe entonces, para el bloque y el cilindro, como



$$\begin{aligned} F - F_r &= ma_B \\ F_r &= Ma_C, \end{aligned}$$

donde a_B y a_C son las aceleraciones del bloque y del cilindro *referidas a un sistema inercial*, y m y M son sus masas respectivas.

Por otra parte, la fuerza de rozamiento ejerce un momento de fuerza que produce la rotación del cilindro, y se verifica

$$F_r R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha,$$

donde α es la aceleración angular del cilindro. Esta aceleración angular se traduce en una cierta aceleración del centro de masas del cilindro, que está referida al eje instantáneo de giro. Es decir, la aceleración angular α produce una aceleración del cilindro *respecto al bloque sobre el que se apoya*, a_r, que se relaciona con α como

$$\alpha = -\frac{a_r}{R},$$

donde el signo menos se debe a que el cilindro rueda en sentido antihorario y, por tanto, produce una aceleración opuesta a a_B y a_C. Las aceleraciones a_r, a_C y a_B están relacionadas como

$$a_C = a_B + a_r$$

En definitiva, las ecuaciones de movimiento en el sistema son

$$F - F_r = ma_B \tag{43}$$

$$F_r = Ma_C \tag{44}$$

$$F_r = -\frac{1}{2}Ma_r \tag{45}$$

$$a_C = a_B + a_r \tag{46}$$

De las ecuaciones (44) y (45) resulta

$$a_r = -2a_C$$

que, usando además (46), lleva a

$$a_C = \frac{1}{3}a_B$$

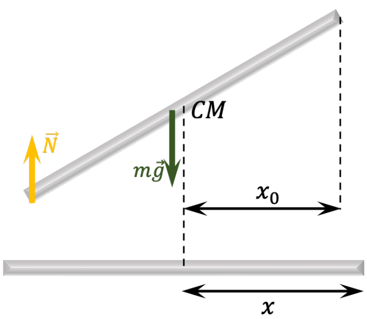
Sustituyendo en (43) y (44) y despejando resulta, finalmente,

$$\boxed{a_B = \frac{3F}{M+3m}}$$

Problema 1.22

Un bastón uniforme de 2 m de longitud se apoya sobre el hielo formando un ángulo de 30º con la superficie horizontal. El bastón cae desde el reposo, manteniendo en todo momento su extremo inferior en contacto con la superficie del hielo. Suponiendo que éste no ejerce rozamiento, calcular la distancia que se mueve el extremo inferior mientras el bastón cae completamente sobre la superficie helada.

Las fuerzas que están actuando sobre el bastón son las que se representan en la figura: el peso $m\vec{g}$ y la reacción normal de la superficie de apoyo, $\vec{N}$. Como no existen fuerzas en la dirección horizontal, el centro de masas del sistema no se desplaza horizontalmente, y podemos tomar el origen del sistema de referencia en la coordenada vertical del centro de masas, por tanto. En tal caso, La distancia que se mueve el extremo interior del bastón es entonces



$$\Delta x = x - x_0,$$

donde
$$x_0 = \frac{L}{2}\cos\theta$$
y
$$x = \frac{L}{2},$$
donde L es la longitud del bastón y θ es el ángulo que forma el bastón con la horizontal. En definitiva,
$$\boxed{\Delta x = \frac{L}{2}(1-\cos\theta) = 0.134 \text{ m} = 13.4 \text{ cm}}$$

Problema 1.23

Una bola de billar inicialmente en reposo recibe un golpe instantáneo mediante un taco. El impulso es horizontal y se aplica a una distancia $2R/3$ por debajo del centro de masas de la bola. La velocidad inicial de la bola es v_0, y el coeficiente de rozamiento cinético es μ_c. Calcular

a) la velocidad angular inicial ω_0.

b) la velocidad de la bola una vez que comienza a rodar sin deslizamiento.

c) la energía cinética inicial de la bola justo después del golpe.

a) Cuando recibe el golpe del taco, la bola de billar adquiere un momento lineal igual al impulso de la fuerza aplicada
$$\Delta p = F\Delta t = mv_0,$$
donde Δt es el tiempo durante el que actúa la fuerza y v_0 es la velocidad inicial de la bola. Análogamente, la bola adquiere un momento angular al ser golpeada, igual a
$$\Delta L = r\Delta p = \frac{2}{3}R\Delta p,$$
donde r es la distancia al eje de rotación del punto de impacto de la fuerza. Puesto que el punto de impacto está situado a una distancia $\frac{2}{3}R$ por debajo del centro de masas, la bola empieza a moverse en sentido antihorario, con una velocidad angular inicial que verifica
$$-\Delta L = I\omega_0, \tag{47}$$
esto es,
$$\boxed{\omega_0 = -\frac{\Delta L}{I} = -\frac{\frac{2}{3}mRv_0}{\frac{2}{5}mR^2} = -\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}} \tag{48}$$
El signo "$-$" en (47) y (48) indica que el sentido de la velocidad angular ω_0 es tal que da lugar a una velocidad lineal opuesta a v_0.

b) A partir del momento en que se golpea, la bola se desplaza por la superficie sometida a su peso mg, a la fuerza de reacción normal N y a la fuerza de rozamiento F_r. La segunda ley de Newton se escribe entonces para la bola como
$$-F_r = -\mu_c N = ma \tag{49}$$
$$mg - N = 0, \tag{50}$$

donde a es la aceleración del centro de masas de la bola. De (49) resulta $F_r = \mu_c mg$ y, por tanto,

$$a = -\mu_c g,$$

de manera que la velocidad instantánea de traslación de la bola verifica

$$v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu_c gt, \tag{51}$$

que indica que la velocidad de la bola disminuye conforme se mueve

Con respecto a la rotación, la única fuerza aplicada que ejerce momento es la de rozamiento, que está aplicada a una distancia R del eje de rotación. Se verifica entonces

$$F_r R = I\alpha,$$

donde α es la aceleración angular de la bola; en este caso, el signo es positivo, porque el momento de la fuerza de rozamiento produce una aceleración en la dirección de movimiento de traslación de la bola. De aquí,

$$\alpha = \frac{F_r R}{I} = \frac{\mu_c mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R},$$

de forma que la velocidad angular instantánea es

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t, \tag{52}$$

donde ω_0 está dado por (48). La ecuación (52) indica que la velocidad angular de la bola aumenta conforme se mueve.

Así pues, esta bola con impulso inicial tiene una velocidad angular inicial opuesta a la velocidad de traslación pero que va aumentando en el tiempo; análogamente, la velocidad de traslación disminuye en el tiempo. En un cierto instante $\bar{t}$ se cumple la condición

$$v(\bar{t}) = \omega(\bar{t})R,$$

y a partir de ese momento la bola gira sin deslizar. Teniendo en cuenta (51) y (52), el tiempo en el que se verifica la condición de rodadura verifica

$$v_0 - \mu_c g\bar{t} = \omega_0 + \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}\bar{t},$$

esto es,

$$\bar{t} = \frac{16}{21}\frac{v_0}{\mu_c g}$$

En ese instante, la velocidad de la bola es entonces

$$\boxed{v(\bar{t}) = v_0 - \mu_c g\bar{t} = \frac{5}{21}v_0}$$

c) La energía cinética inicial de la bola es

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

es decir, teniendo en cuenta (48) y simplificando,

$$\boxed{K = \frac{19}{18}mv_0^2}$$