



FÍSICA DEL ESTADO SÓLIDO



TEMA 5

DIAMAGNETISMO Y PARAMAGNETISMO

CONTENIDO

Definiciones fundamentales

Intensidad de campo magnético

Momento dipolar magnético

Imanación

Inducción magnética

Clasificación de los sólidos

Diamagnéticos

Paramagnéticos

Sólidos con orden magnético

Momentos atómicos: reglas de Hund

Cálculo de la susceptibilidad

Diamagnetismo atómico

Ecuación de Larmor

Paramagnetismo atómico

Ley de Curie

Diamagnetismo de Landau

Paramagnetismo de Pauli

Resultados experimentales

DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Intensidad de campo magnético

\vec{H}

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Momento dipolar magnético

\vec{m}

$$\vec{m}_\ell = -\frac{g_\ell \mu_B}{\hbar} \vec{\ell}, g_\ell = 1$$

$$\vec{m}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{s}, g_s = 2$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

$$\vec{m} = -\frac{g_J \mu_B}{\hbar} \vec{J}$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$$\Delta \varepsilon = -\mu_0 \vec{m} \cdot \vec{H}$$

$$\vec{m} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial(\Delta \varepsilon)}{\partial \vec{H}}$$

Imanación

\vec{M}

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

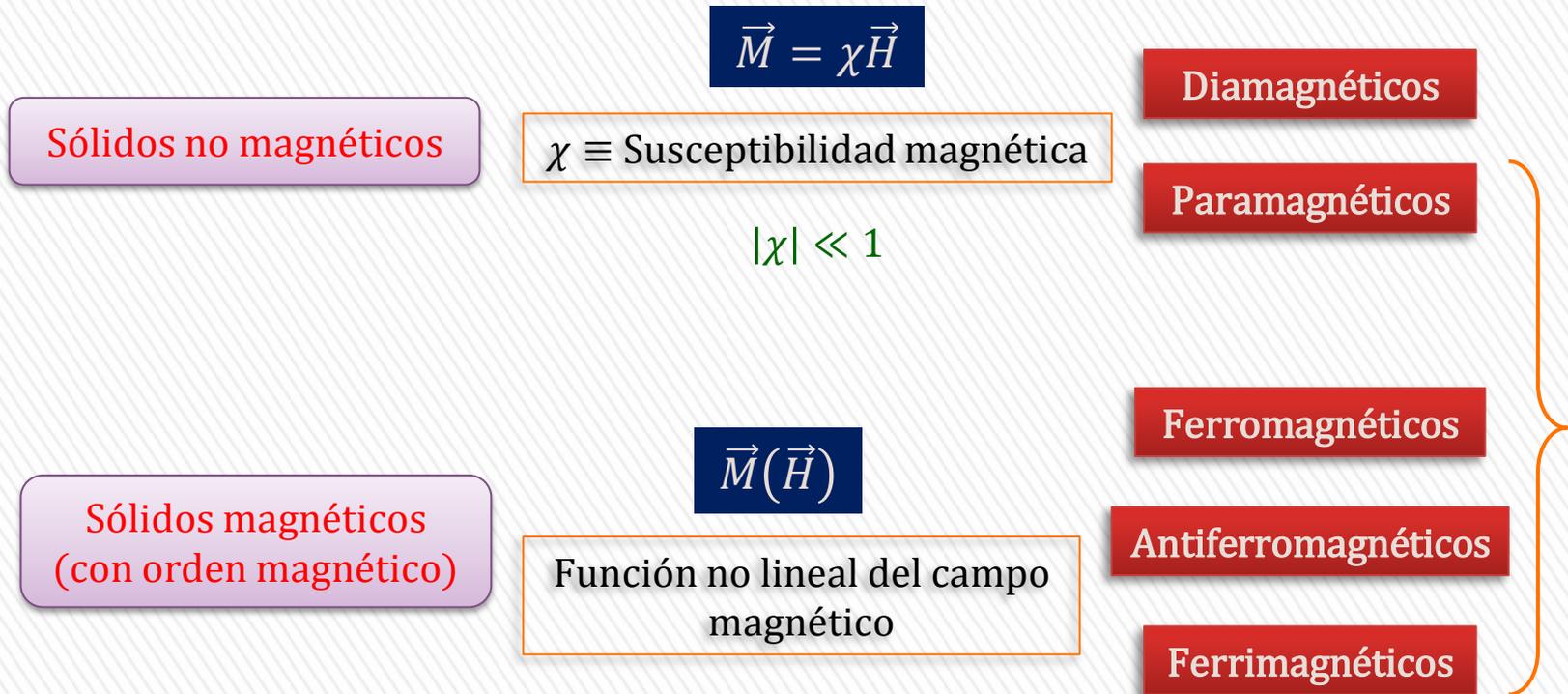
Inducción magnética

\vec{B}

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SÓLIDOS

Todos los sólidos interactúan con los campos magnéticos



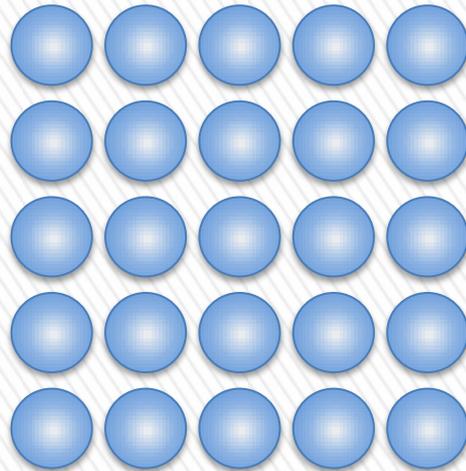
$$\vec{M} = \chi \vec{H} \longrightarrow \vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu \vec{H} \approx \mu_0 \vec{H}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SÓLIDOS

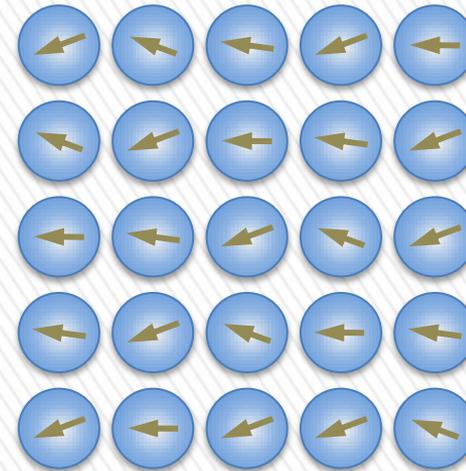
Diamagnéticos

Sólidos sin momentos magnéticos permanentes

$$\vec{H} = \vec{0}$$



$$\vec{H} \neq \vec{0}$$



$$\chi < 0$$

La susceptibilidad diamagnética es independiente de la temperatura

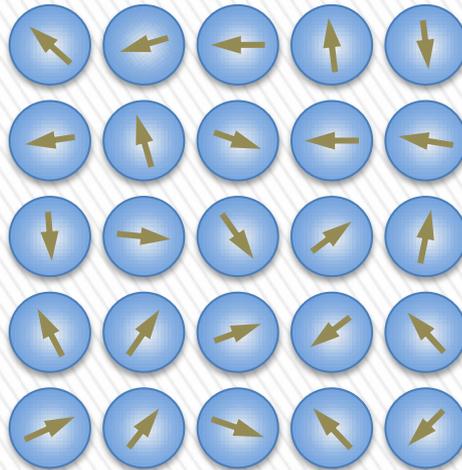
El diamagnetismo es un fenómeno universal

CLASIFICACIÓN DE LOS SÓLIDOS

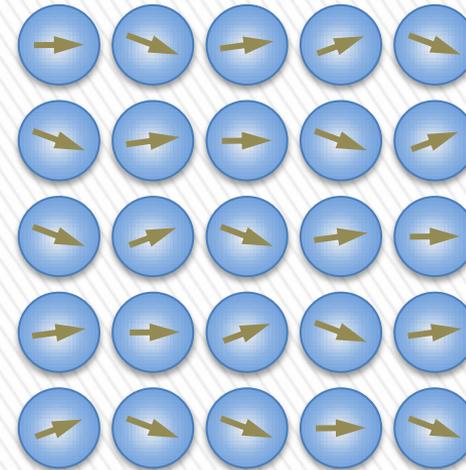
Paramagnéticos

Sólidos con momentos magnéticos permanentes orientados al azar

$$\vec{H} = \vec{0}$$



$$\vec{H} \neq \vec{0}$$



$$\chi > 0$$

$$\chi(T) = \frac{C}{T}$$

Ley de Curie

CLASIFICACIÓN DE LOS SÓLIDOS

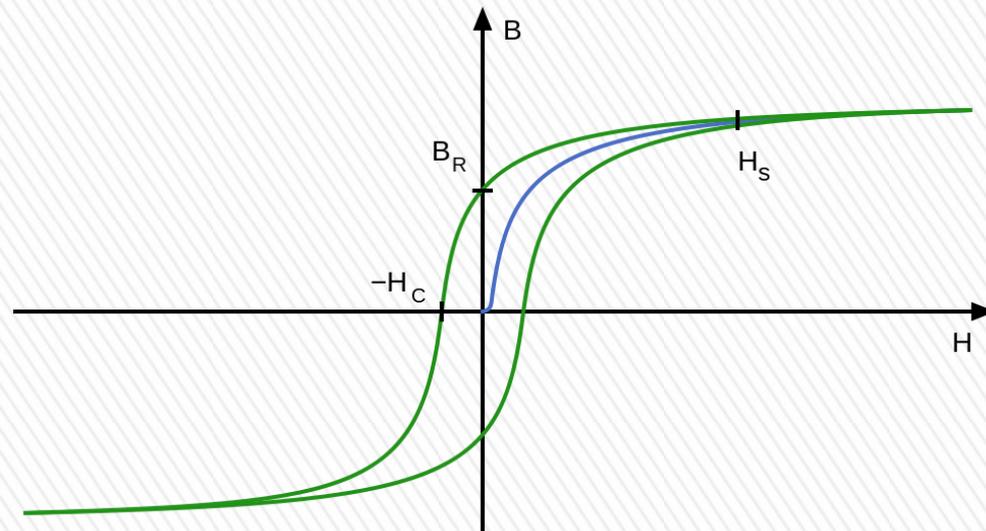
Ferromagnéticos



Antiferromagnéticos



Ferrimagnéticos



Los ferro- y ferrimagnéticos pueden presentar imanación no nula a campo magnético nulo

MOMENTOS ATÓMICOS: REGLAS DE HUND

Momento magnético de un átomo

Contribución electrónica

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

Contribución nuclear

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \ll \mu_B$$

Átomo con n electrones en una capa caracterizada por ℓ

$$0 \leq n \leq 2(2\ell + 1)$$

$\{\vec{l}_i\}$

$\{\vec{s}_i\}$

$\vec{J}??$



$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \vec{j}_i$$

Acoplamiento $j - j$

(En átomos pesados)



$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i \quad \vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{s}_i$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Acoplamiento $L - S$

L, S y J son buenos números cuánticos

MOMENTOS ATÓMICOS: REGLAS DE HUND

Estado fundamental del conjunto de n electrones

$$0 \leq n \leq 2(2\ell + 1)$$

Primera regla

El valor de S es el máximo permitido por el principio de exclusión

$$n \leq 2\ell + 1 \quad \longrightarrow \quad S = \frac{1}{2}n \quad \text{Valor máximo } S = \ell + \frac{1}{2}$$

$$n > 2\ell + 1 \quad \longrightarrow \quad S \text{ disminuye en } \frac{1}{2} \text{ por cada electrón en exceso}$$

Segunda regla

El valor de L es el máximo compatible con el valor de S y con el principio de exclusión

$L = 0$ si la capa está medio llena o completamente llena

Tercera regla

El valor de J es $|L - S|$, si $n \leq 2\ell + 1$, y $L + S$, si $n \geq 2\ell + 1$

$$^{2S+1}[L]_J$$



MOMENTOS ATÓMICOS: REGLAS DE HUND

Metales de transición

n	m_ℓ					S	L	J	TÉRMINO
	2	1	0	-1	-2				
1	↑					$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	${}^2D_{\frac{3}{2}}$
2	↑	↑				1	3	2	3F_2
3	↑	↑	↑			$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	${}^4F_{\frac{3}{2}}$
4	↑	↑	↑	↑		2	2	0	5D_0
5	↑	↑	↑	↑	↑	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	${}^6S_{\frac{5}{2}}$
6	↑↓	↑	↑	↑	↑	2	2	4	5D_4
7	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	${}^4F_{\frac{9}{2}}$
8	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	1	3	4	3F_4
9	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	${}^2D_{\frac{5}{2}}$
10	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	0	0	0	1S_0

CÁLCULO DE LA SUSCEPTIBILIDAD

La acción de un campo magnético introduce cambios en el hamiltoniano

Cambio en la energía cinética

$$\vec{p} = m_e \vec{v} - e\vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{B} \parallel OZ \quad \rightarrow \quad \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$$

$$T = \frac{1}{2m_e} \sum_i (\vec{p}_i + e\vec{A}_i)^2 = T_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{8m_e} B^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Energía asociada al espín

$$\Delta \varepsilon_S = -\vec{m}_S \cdot \vec{B} = \frac{2\mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

$$H = H_0 + \Delta H$$

$$\Delta H = \frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{8m_e} B^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

CÁLCULO DE LA SUSCEPTIBILIDAD

Teoría de perturbaciones estacionarias (niveles no degenerados)

$$\Delta\varepsilon_{LSJ} = \langle LSJ | \Delta\mathcal{H} | LSJ \rangle = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \langle LSJ | (\vec{L} + 2\vec{S}) | LSJ \rangle + \frac{e^2}{8m_e} B^2 \left\langle LSJ \left| \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \right| LSJ \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\mu_B}{\hbar} B \cdot (L + 2S) \right\rangle \approx O(\mu_B B) \approx 10^{-4} \text{ eV}$$

$$\frac{e^2}{8m_e} B^2 \langle (x_i^2 + y_i^2) \rangle \approx O \left[(\mu_B B)^2 \frac{m_e a_0^2}{\hbar^2} \right] \approx 10^{-9} \text{ eV}$$

El primer término es el predominante

$$\vec{M} = \sum_{\varepsilon} \frac{N(\varepsilon)}{V} \vec{m}(\varepsilon) = - \sum_{\varepsilon} \frac{N(\varepsilon)}{V} \frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \vec{B}} = - \sum_{\varepsilon} n(\varepsilon, T) g(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{B}}$$

$$\chi = \frac{\vec{M}}{\vec{H}} = \frac{n}{\vec{H}} \langle \vec{m} \rangle = - \frac{n}{\vec{H}} \left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{B}} \right\rangle$$

DIAMAGNETISMO ATÓMICO

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{e^2}{8m_e} B^2 \left\langle LSJ \left| \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \right| LSJ \right\rangle \quad \langle LSJ | x_i^2 | LSJ \rangle = \langle LSJ | y_i^2 | LSJ \rangle = \frac{1}{3} \langle LSJ | r_i^2 | LSJ \rangle$$

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{e^2}{12m_e} B^2 \left\langle LSJ \left| \sum_i r_i^2 \right| LSJ \right\rangle$$

$$\chi_{dia}^{Larmor} = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left\langle LSJ \left| \sum_i r_i^2 \right| LSJ \right\rangle$$

Diamagnetismo de Larmor

La contribución más importante proviene de los electrones en capas más externas

$$\chi_{dia}^{Larmor} \sim -\frac{e^2 n \mu_0}{6m_e} Z_a r_a^2 \approx -10^{-6} Z_a$$

Describe el comportamiento magnético de átomos con capas completamente llenas ($L = S = J = 0$)

PARAMAGNETISMO ATÓMICO

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\mu_B}{\hbar} B \langle LSJ | (L_z + 2S_z) | LSJ \rangle$$

El estado fundamental es $2J + 1$ veces degenerado



$$\langle LSJM_J | (L_z + 2S_z) | LSJM'_J \rangle$$

Teorema de Wigner - Eckart

$$\langle LSJM_J | (L_z + 2S_z) | LSJM'_J \rangle = g(LSJ) \langle LSJM_J | J_z | LSJM'_J \rangle = g(LSJ) \hbar M_J \delta_{M_J, M'_J}$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Factor giromagnético de Landé

$$\Delta\varepsilon_1 = \mu_B g_J B M_J$$

La acción del campo magnético rompe la degeneración del estado fundamental

$$\Delta\varepsilon = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



$$\vec{m} = -\frac{\mu_B g_J}{\hbar} \vec{J}$$

PARAMAGNETISMO ATÓMICO

$$\langle m \rangle = -g_J \mu_B \sum_{M_J} M_J P(M_J) \quad P(M_J) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\sum_{M_J} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

$$\langle m \rangle = -g_J \mu_B \frac{\sum_{M_J=-J}^{+J} M_J \exp\left(-\frac{g_J \mu_B B}{k_B T} M_J\right)}{\sum_{M_J=-J}^{+J} \exp\left(-\frac{g_J \mu_B B}{k_B T} M_J\right)} \equiv -g_J \mu_B \frac{\sum_{M_J=-J}^{+J} M_J e^{-\alpha M_J}}{\sum_{M_J=-J}^{+J} e^{-\alpha M_J}} \quad \alpha = \frac{g_J \mu_B B}{k_B T}$$

$$\langle m \rangle = g_J \mu_B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\ln \left(\sum_{M_J=-J}^{+J} e^{-\alpha M_J} \right) \right]$$

$$\sum_{M_J=-J}^{+J} e^{-\alpha M_J} = \llbracket x = M_J + J + 1 \rrbracket = e^{\alpha(J+1)} \sum_{x=1}^{2J+1} e^{-\alpha x} = \left[\sum_{i=1}^N r^i = r \frac{1-r^N}{1-r} \right] = \frac{e^{\alpha J} - e^{-\alpha(J+1)}}{1 - e^{-\alpha}} =$$

$$= \frac{e^{\alpha(J+\frac{1}{2})} - e^{-\alpha(J+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sinh \alpha \left(J + \frac{1}{2} \right)}{\sinh \frac{\alpha}{2}}$$

PARAMAGNETISMO ATÓMICO

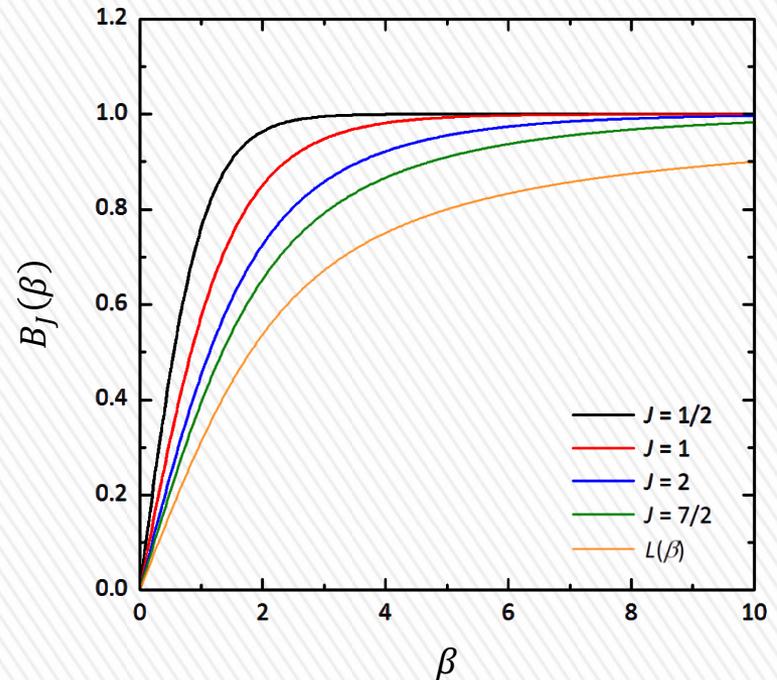
$$M = ng_J\mu_B \left[\frac{2J+1}{2} \coth \alpha \left(\frac{2J+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \coth \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$M = ng_J\mu_B J B_J(\beta)$$

$$\beta = \alpha J = \frac{g_J\mu_B J B}{k_B T}$$

$$B_J(\beta) = \frac{2J+1}{2J} \coth \beta \left(\frac{2J+1}{2J} \right) - \frac{1}{2J} \coth \frac{\beta}{2J}$$

Función de Brillouin de orden J



PARAMAGNETISMO ATÓMICO

La imanación depende de la temperatura a través de β

La imanación es nula si $J = 0$

Temperaturas altas o campos débiles ($\beta \ll 1$)

$$\lim_{x \ll 1} \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad \lim_{\beta \ll 1} B_J(\beta) = \frac{1J+1}{3} \frac{1}{J} \beta$$

$$M \approx \frac{1}{3} \frac{n(g_J \mu_B)^2 \mu_0}{k_B T} J(J+1) H$$



$$\chi_{para} = \frac{1}{3} \frac{n(g_J \mu_B)^2 \mu_0}{k_B T} J(J+1) = \frac{C}{T}$$

Ley de Curie

Temperaturas bajas o campos intensos ($\beta \gg 1$)

$$\lim_{x \gg 1} \coth x = 1$$



$$\lim_{\beta \gg 1} M = n g_J \mu_B J$$

BLOQUEO DEL MOMENTO ANGULAR

DIAMAGNETISMO DE LANDAU

En los metales, el gas de electrones también interacciona con campos magnéticos

Electrones libres

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m_e} \quad \vec{A} = (0, Bx, 0)$$

$$H = \frac{1}{2m_e} [p_x^2 + (p_y + eBx)^2 + p_z^2] = \frac{p_z^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} [p_x^2 + p_y^2 + (e^2 B^2 x^2 + 2eBp_y x)]$$

$$H = H_{OXY} + \frac{p_z^2}{2m_e}$$

$$\frac{p_z^2}{2m_e}$$



Movimiento libre en la dirección del campo magnético

$$H_{OXY} = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} (e^2 B^2 x^2 + 2eBp_y x)$$

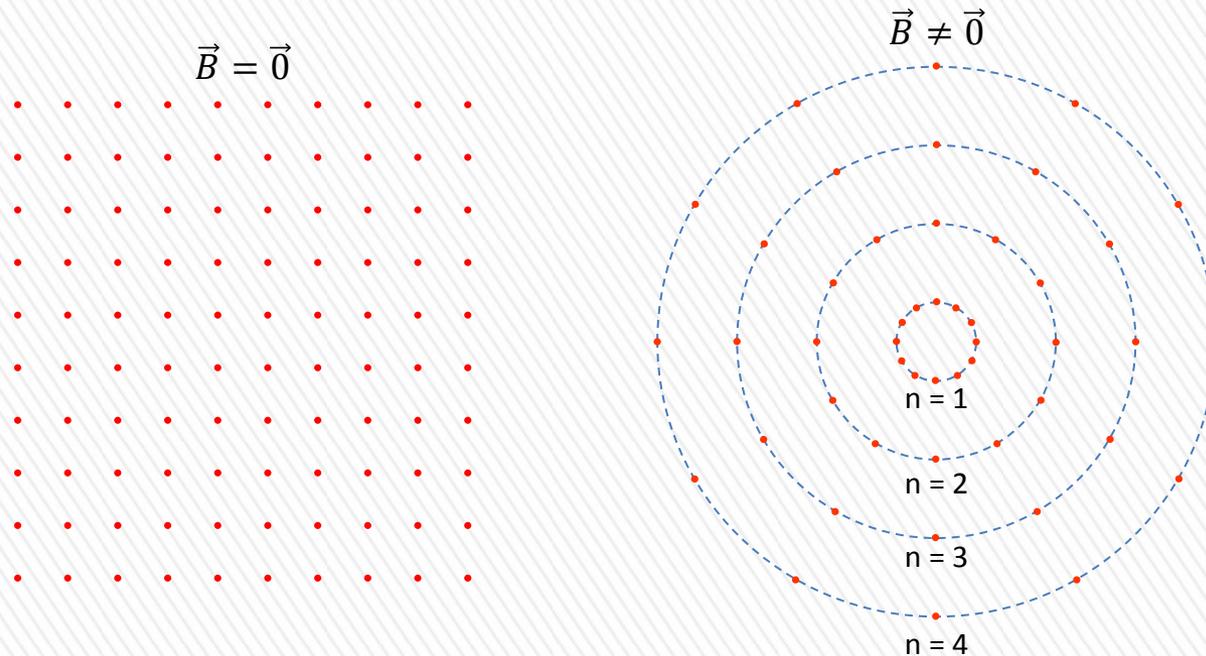


Oscilación en el plano OXY

$$\varepsilon_{n,k_z} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e}$$

DIAMAGNETISMO DE LANDAU



Niveles de Landau

$$g(n, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\hbar\omega_c}{2} \left[\varepsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \right]^{-1/2}$$

$$\chi_{dia}^{Landau} = -\frac{\mu_B^2}{6\pi^2} \mu_0 \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{1/2} = -\frac{\mu_B^2 \mu_0 n_e}{2\varepsilon_F} = -\frac{\mu_0}{3} \mu_B^2 g^0(\varepsilon_F)$$

PARAMAGNETISMO DE PAULI

El espín de los electrones del gas también se acopla al campo magnético

Electrones libres

$$\vec{B} = \vec{0}$$

$$g_{\pm}^0(\varepsilon)$$

Densidad de estados electrónicos con $m_s = \pm \frac{1}{2}$ a campo nulo

$$g_+^0(\varepsilon) = g_-^0(\varepsilon) = \frac{1}{2} g^0(\varepsilon)$$

Cada electrón con $m_s = \pm \frac{1}{2}$ contribuye a la imanación con $\mp \frac{\mu_B}{V}$ a campo nulo

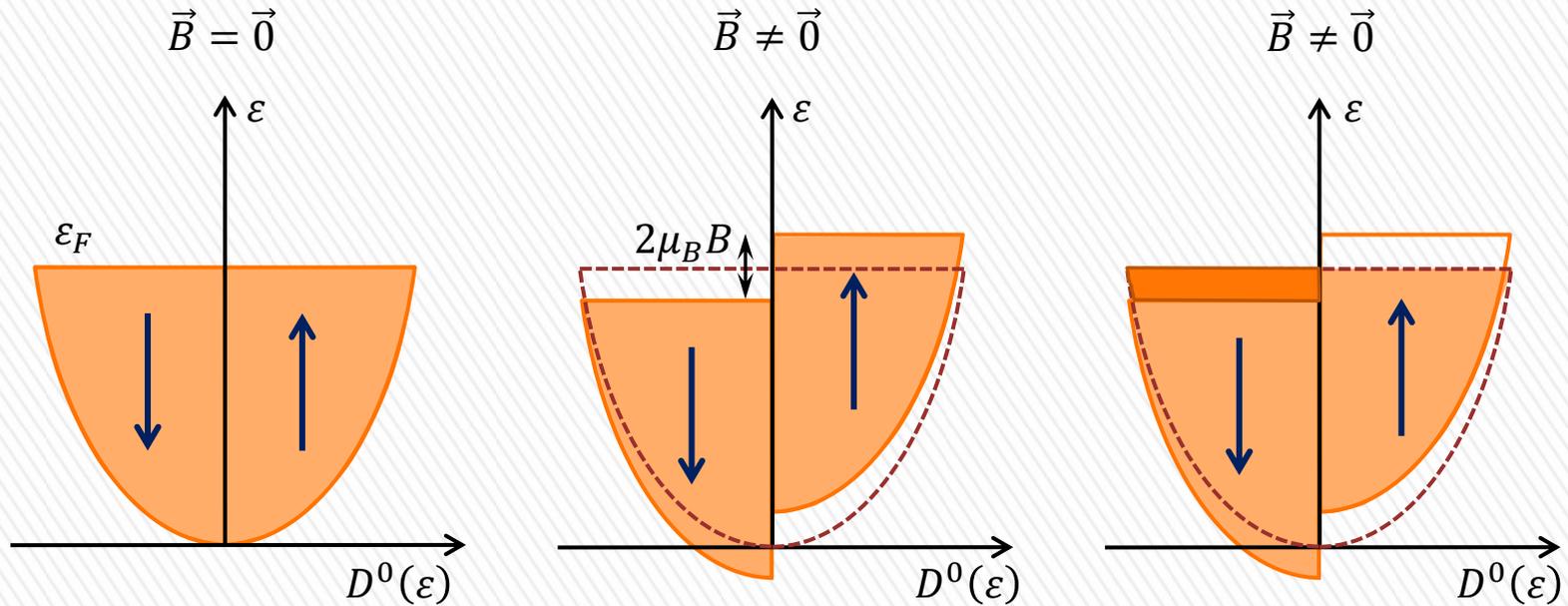
$$M^0 = -\mu_B(n_+^0 - n_-^0) = 0$$

$$\vec{B} \neq \vec{0}$$

$$\Delta\varepsilon = 2\mu_B B m_s$$

Los electrones con espín $m_s = \pm \frac{1}{2}$ cambian su energía en $\pm \mu_B B$

PARAMAGNETISMO DE PAULI



$$n_{\pm} = \int_{\pm\mu_B B}^{\infty} g_{\pm}(\epsilon) n(\epsilon, T) d\epsilon$$

$$g_{+}(\epsilon) = g_{+}^0(\epsilon - \mu_B B) = \frac{1}{2} g^0(\epsilon - \mu_B B)$$

$$g_{-}(\epsilon) = \frac{1}{2} g^0(\epsilon + \mu_B B)$$

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \int_{\pm\mu_B B}^{\infty} g^0(\epsilon \mp \mu_B B) n(\epsilon, T) d\epsilon$$

PARAMAGNETISMO DE PAULI

$$g^0(\varepsilon \mp \mu_B B) \approx g^0(\varepsilon) \mp \mu_B B \frac{dg^0(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

$$n = n_+ + n_- \approx \int_0^\infty n(\varepsilon, T) g^0(\varepsilon) d\varepsilon \quad \rightarrow$$

La energía de Fermi no varía por la acción del campo

$$n_+ - n_- \approx -\mu_B B \int_0^\infty n(\varepsilon, T) \frac{dg^0(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = -\mu_B B \int_0^\infty g^0(\varepsilon) \left(-\frac{dn(\varepsilon, T)}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon \approx -\mu_B B g^0(\varepsilon_F)$$

$$M = -\mu_B (n_+ - n_-) = \mu_B^2 B g^0(\varepsilon_F)$$

$$\chi_{para}^{Pauli} = \mu_0 \mu_B^2 g^0(\varepsilon_F) = \frac{3n_e \mu_B^2}{2\varepsilon_F} \mu_0$$

$$\chi_e = \frac{2}{3} \chi_{para}^{Pauli} = \mu_0 \frac{n_e \mu_B^2}{\varepsilon_F}$$

RESULTADOS EXPERIMENTALES

