

AMPLIACIÓN DE FÍSICA DEL ESTADO SÓLIDO

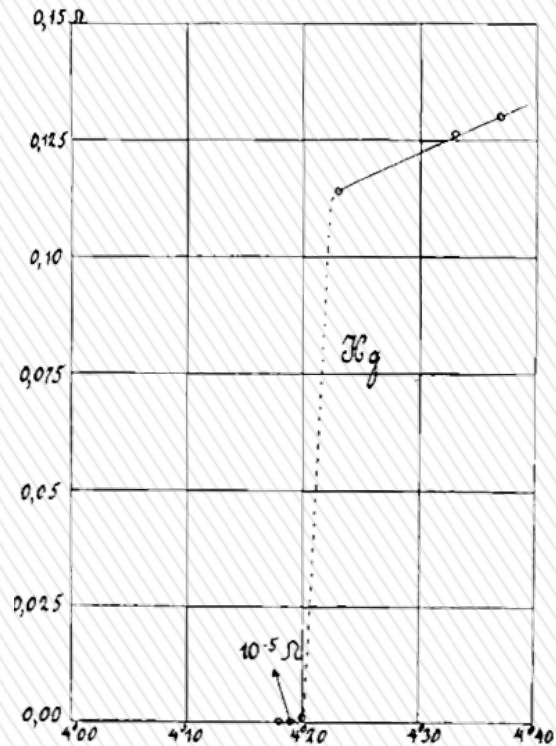


TEMA 5

SUPERCONDUCTIVIDAD

INTRODUCCIÓN

Kammerlingh Onnes, 1911



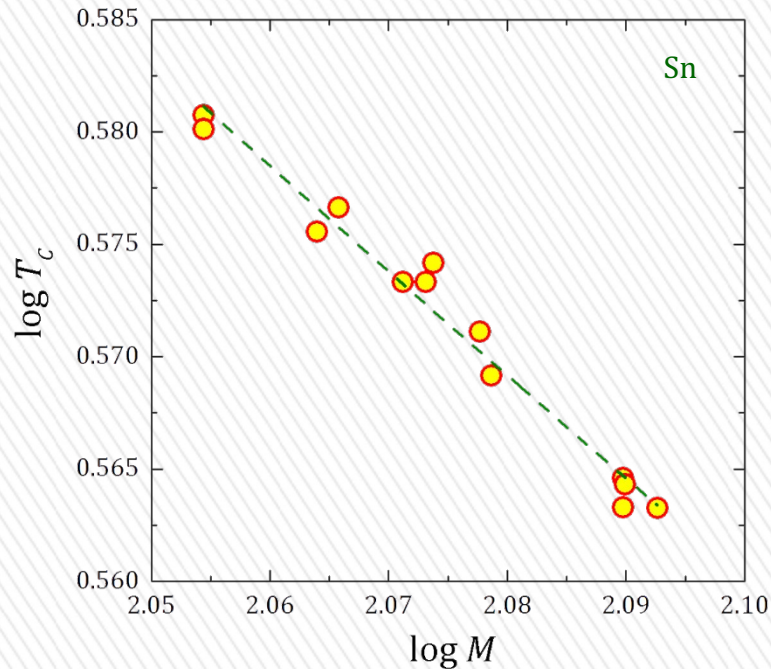
Elemento	T_c (K)	H_c (Gauss)
Al	1.196	99
Cd	0.56	30
Ga	1.091	51
α -Hg	4.15	411
β -Hg	3.95	339
In	3.40	293
Ir	0.14	19
Mo	0.92	98
Nb	9.26	1980
Os	0.655	65
Pb	7.19	803
Sn	3.72	305
Ta	4.48	830
Tc	7.77	1410
Ti	0.39	100
V	5.30	1020
W	0.012	1
Zn	0.875	53
Zr	0.65	47

VALORES CRÍTICOS

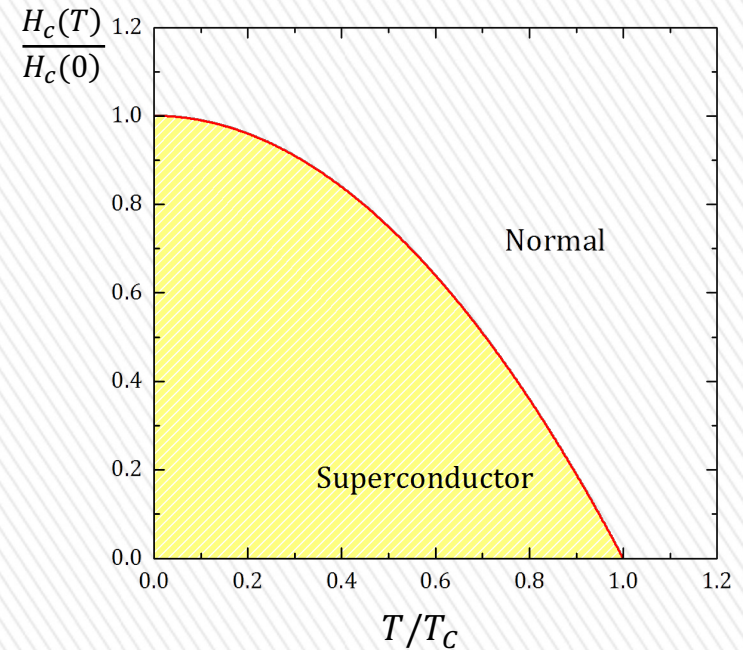
Temperatura crítica T_C ($H = 0$)

$$T_C \propto M^{-0.5}$$

Efecto isotópico



Campo crítico H_C ($T < T_C$)



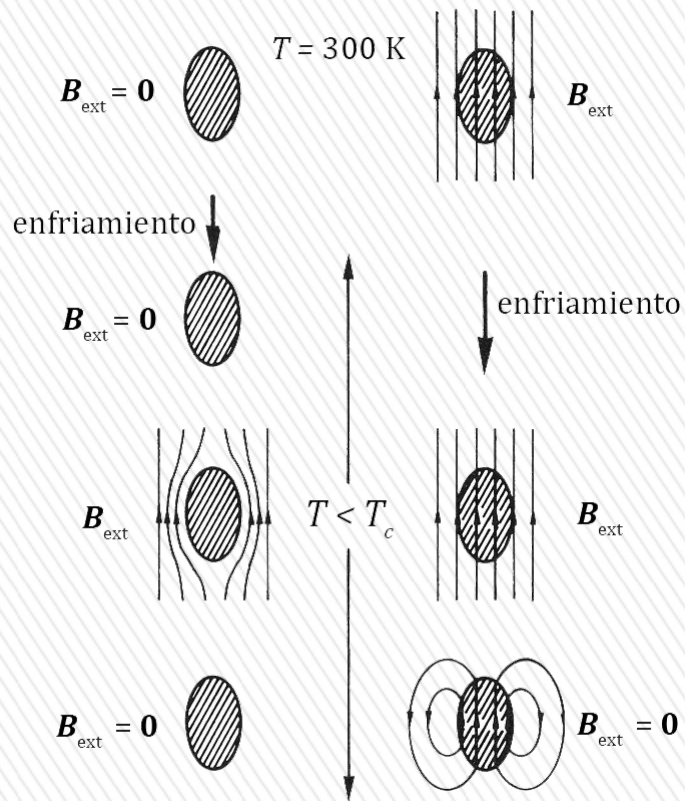
$$\frac{H_C(T)}{H_C(0)} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^2$$

Superconductores tipo I

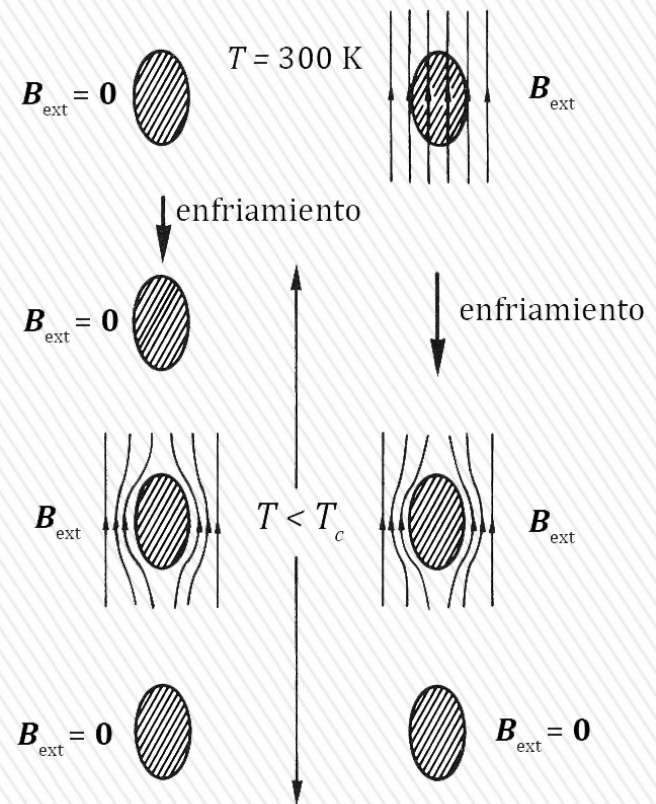
EFEECTO MEISSNER-OSCHENFELD

Comportamiento magnético

Conductor perfecto



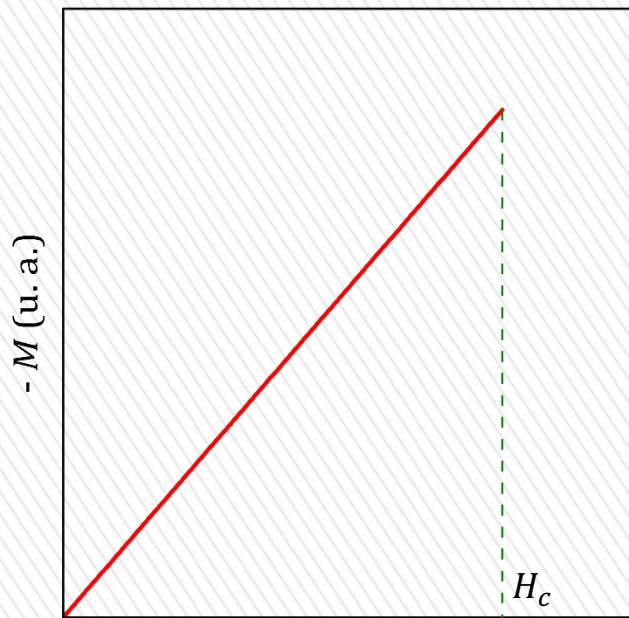
Superconductor



EFECTO MEISSNER-OSCHENFELD

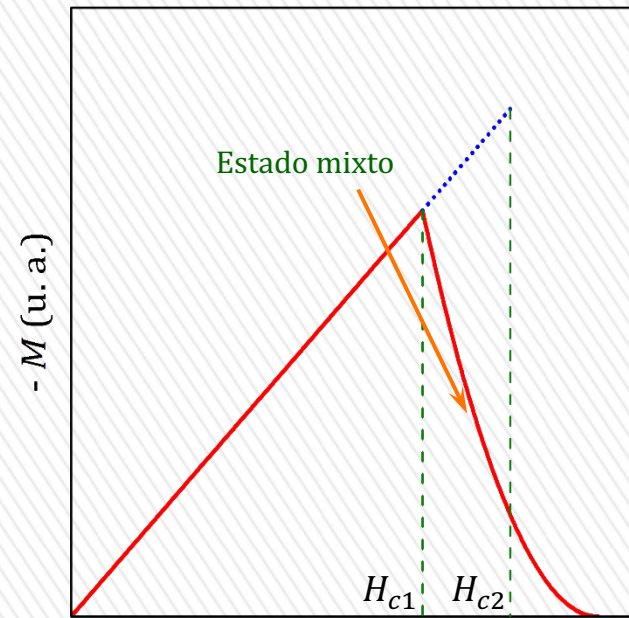
Un superconductor es un sistema diamagnético perfecto

$$\vec{B} = \vec{0} \text{ dentro de un superconductor}$$



H (u. a.)

Tipo I



H (u. a.)

Tipo II

TERMODINÁMICA DE LA TRANSICIÓN DE FASE

La transición de fase no implica cambio en la estructura cristalina ni en el orden magnético

Diferencia de entalpía libre

$$dg = du - s \cdot dT = -\vec{M} \cdot d\vec{B}_{ext} - s \cdot dT \quad \Rightarrow \quad g(B_{ext}, T) = g(0, T) - \int_0^{B_{ext}} \vec{M} \cdot d\vec{B}_{ext}$$

$$\begin{aligned}\vec{M} &= -\vec{H} \\ \vec{B}_{ext} &= \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$



$$g_s(B_{ext}, T) = g_s(0, T) + \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}$$

En la transición $g_s(B_c, T) = g_n(B_c, T) = g_n(0, T)$

$$g_s(0, T) - g_n(0, T) = -\frac{B_c^2(T)}{2\mu_0} < 0$$

Diferencia de entropía

$$\Delta s = s_s(0, T) - s_n(0, T) = -\frac{\partial \Delta g}{\partial T} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{d(B_c^2)}{dT} = \frac{B_c}{\mu_0} \frac{dB_c}{dT}$$

$\Delta s = 0$ en la transición

$\Delta s < 0$ para $T < T_c$

TERMODINÁMICA DE LA TRANSICIÓN DE FASE

Diferencia de calor específico

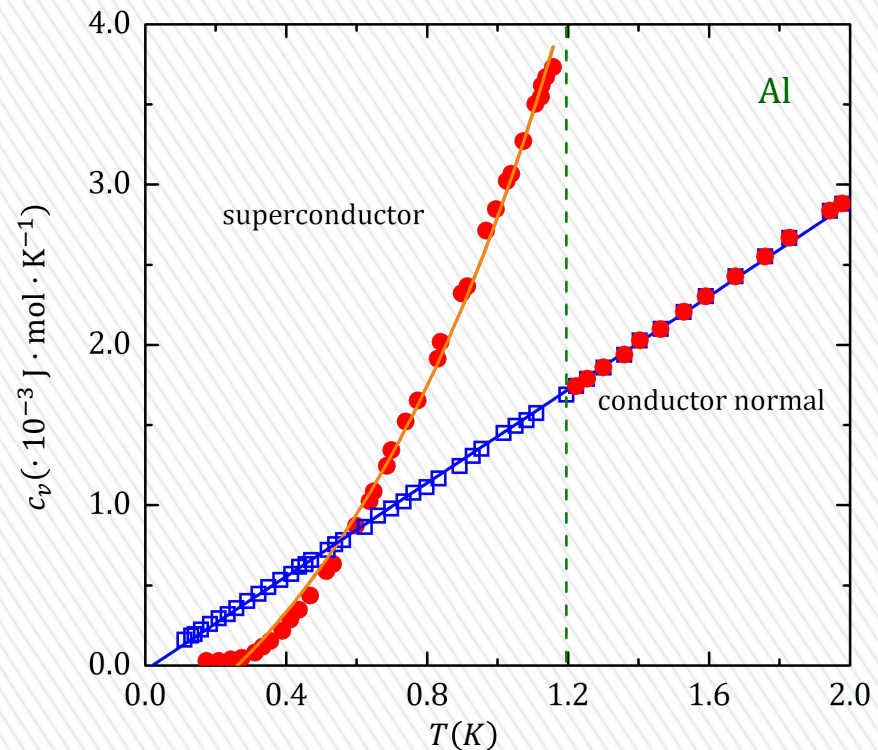
$$\Delta c = T \frac{\partial \Delta s}{\partial T} = \frac{T}{\mu_0} \left[B_c \frac{d^2 B_c}{dT^2} + \left(\frac{dB_c}{dT} \right)^2 \right]$$

A la temperatura crítica

$$\Delta c(T_c) = \frac{T_c}{\mu_0} \left(\frac{dB_c}{dT} \right)^2$$

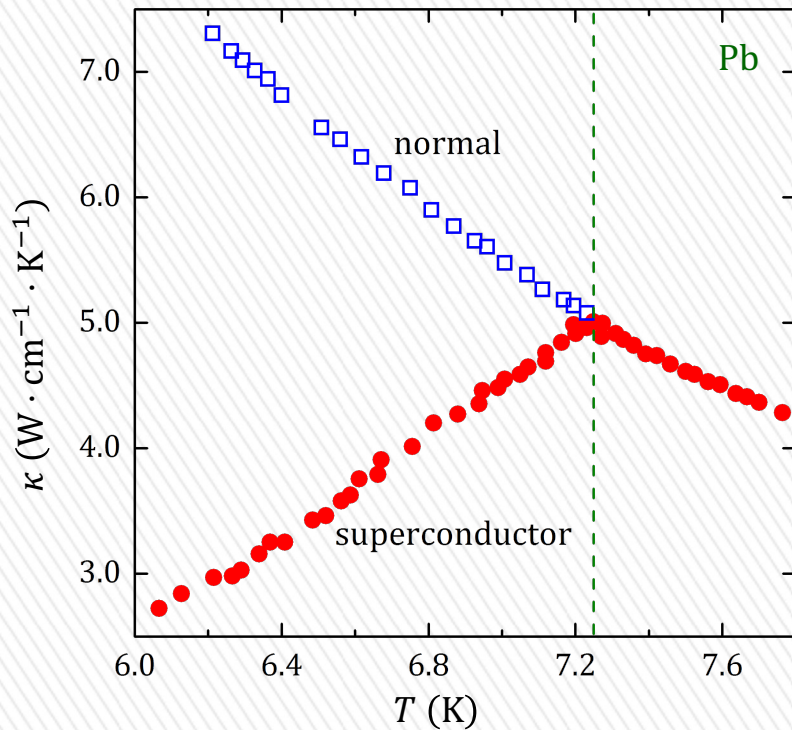
$$c_n = \gamma T + AT^3$$

$$c_s \propto \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)$$



OTRAS CARACTERÍSTICAS

Conductividad térmica



➤ No exhiben efecto Peltier.

➤ Sólo se da efecto túnel para potenciales por encima de un **valor umbral**.

$$eV_0 = \Delta$$

➤ Diferentes **propiedades ópticas** para frecuencias por debajo de otro umbral.

$$\omega_0 = \frac{\Delta}{\hbar}$$

Existe un gap de anchura 2Δ centrado en la energía de Fermi

TEORÍA DE LONDON

Sólo una cierta cantidad de los electrones de conducción da lugar a la supercorriente

Densidad de electrones superconductores n_s

Superconductor bajo un campo eléctrico ($\tau \rightarrow \infty$)

$$m_e \frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{E}$$



$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{E}$$

Primera ecuación de London

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\nabla \times \vec{j}_s + \frac{n_s e^2}{m_e} \vec{B} = \vec{0}$$

Segunda ecuación de London

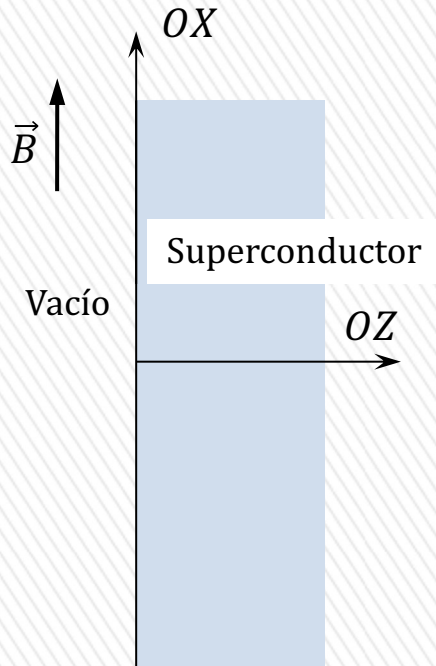
$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{B} \\ \vec{j}_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda_L^2} \begin{Bmatrix} \vec{B} \\ \vec{j}_s \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_L^2 = \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2}$$

Longitud de penetración de London



TEORÍA DE LONDON



Elemento	λ_L (nm)	$\xi(0)$ (nm)
Al	16	1600
Cd	110	760
Nb	39	38
Pb	37	83
Sn	34	230

$$\frac{d^2 B_x^i}{dz^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B_x^i = 0$$

$$B_x^i = B_x^0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda_L}\right)$$

$$j_{ys} = j_{ys}^0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda_L}\right)$$

La base física de la teoría de London no es firme

¿¿ n_s ??

TEORÍA DE GINZBURG – LANDAU

- Existe una magnitud, llamada **parámetro de orden**, que es nula en la fase de alta temperatura y toma un valor finito en la fase de baja temperatura.
- La entalpía libre es **función analítica y monótona** del parámetro de orden.

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$$

$$g(T, \vec{H}, \psi) = g(T, \vec{H}, 0) + \alpha |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + O(|\psi(\vec{r})|^6)$$

Superconductor en ausencia de campo magnético

El sistema es **homogéneo** en este caso.

$$g(T, \vec{H} = \vec{0}, \psi) = g(T, \vec{0}, 0) + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + O(|\psi|^6)$$

$$\beta < 0$$

$$\left(\frac{\partial g(T, \vec{0}, \psi)}{\partial |\psi|} \right)_{|\psi_0|} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 g(T, \vec{0}, \psi)}{\partial |\psi|^2} \right)_{|\psi_0|} > 0$$

TEORÍA DE GINZBURG – LANDAU

$$(\alpha + \beta |\psi_0|^2) |\psi_0| = 0$$

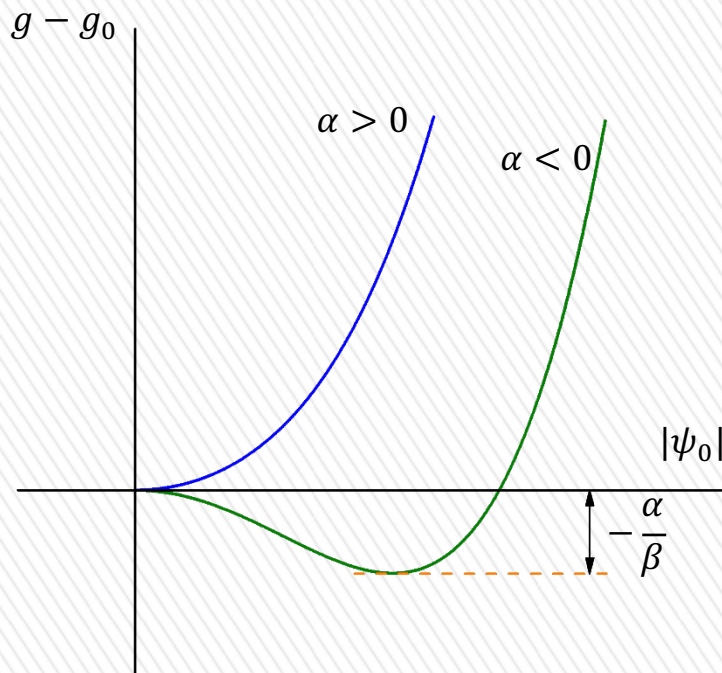
$$\alpha > 0 \rightarrow \psi_0 = 0 \quad \text{Normal}$$

$$\alpha < 0 \rightarrow |\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{Superconductor}$$

El parámetro α debe cambiar de signo en la transición

$$\alpha(T) = a(T - T_c)$$

$$|\psi_0| \propto (T - T_c)^{1/2}$$



$$g_s(T, \vec{H} = \vec{0}, \psi) = g_n(T, \vec{H} = \vec{0}, 0) - \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

$$\Delta g_s(T, \vec{H} = \vec{0}) = -\frac{\mu_0}{2} H_c^2(T) = -\frac{\alpha^2}{2\beta}$$

TEORÍA DE GINZBURG – LANDAU

Superconductor sometido a campo magnético

$$g_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{H}(\vec{r})^2 \quad \text{Energía mecánica almacenada en el medio}$$

$$g_2 = \frac{1}{2m^*} \psi^*(\vec{r}) [-i\hbar\nabla - e^* \vec{A}(\vec{r})]^2 \psi(\vec{r}) \quad \text{Densidad de energía cinética de los electrones superconductores}$$

$$g(T, \vec{H}, \psi) = g(T, \vec{0}, 0) + \alpha |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}(\vec{r})^2 + \frac{1}{2m^*} \psi^*(\vec{r}) [-i\hbar\nabla - e^* \vec{A}(\vec{r})]^2 \psi(\vec{r})$$

$$G(T, \vec{H}, \psi) = G_0(T) + \int_V \left\{ \alpha |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}(\vec{r})^2 + \frac{1}{2m^*} \psi^*(\vec{r}) [-i\hbar\nabla - e^* \vec{A}(\vec{r})]^2 \psi(\vec{r}) \right\} dV$$

$$G(T, \vec{H}, \psi) = G_0(T) + \int_V \left\{ \alpha |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\mu_0}{2} \vec{H}(\vec{r})^2 + \frac{1}{2m^*} |[-i\hbar\nabla - e^* \vec{A}(\vec{r})] \psi(\vec{r})|^2 \right\} dV$$

TEORÍA DE GINZBURG – LANDAU

$$\nabla \cdot \frac{\partial G(T, \vec{A}, \psi)}{\partial \nabla \psi^*} - \frac{\partial G(T, \vec{A}, \psi)}{\partial \psi^*} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial G(T, \vec{A}, \psi)}{\partial \nabla \vec{A}} - \frac{\partial G(T, \vec{A}, \psi)}{\partial \vec{A}} = 0$$

$$\alpha \psi(\vec{r}) + \beta |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) + \frac{1}{2m^*} [-i\hbar \nabla - e^* \vec{A}(\vec{r})]^2 \psi(\vec{r}) = 0$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = -i \frac{\mu_0 e^* \hbar}{2m^*} [\psi^*(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \nabla \psi^*(\vec{r})] - \frac{\mu_0 e^{*2}}{m^*} |\psi(\vec{r})|^2 \vec{A}(\vec{r})$$

Ecuaciones de Ginzburg-Landau

$$\hat{n} \cdot \left[\frac{-\hbar^2}{2m^*} \psi^*(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}) + \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \psi^*(\vec{r}) \vec{A} \psi(\vec{r}) \right] \equiv 0$$

Condiciones de contorno

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}$$

La resolución de estas ecuaciones es muy compleja, en general.

SOLUCIONES GENERALES DE LAS ECUACIONES

Solución trivial

$\psi(\vec{r}) = 0$ es solución de las ecuaciones si $\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$

La solución trivial describe el estado conductor normal

Campo nulo

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \alpha \psi(\vec{r}) + \beta |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) \quad \psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})} \quad \nabla \theta(\vec{r}) = 0$$
$$\psi^*(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \nabla \psi^*(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \alpha \psi(\vec{r}) + \beta \psi^3(\vec{r})$$

$\psi(\vec{r}) = 1$ es solución bajo algunas condiciones

SOLUCIONES GENERALES DE LAS ECUACIONES

Sistema homogéneo

$$\psi(\vec{r}) \approx \psi_0 \quad |\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{en la fase superconductor}$$

$$\vec{j} \approx -\frac{e^{*2}}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{A}(\vec{r})$$



$$\frac{d\vec{j}}{dt} \approx \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{E}(\vec{r})$$

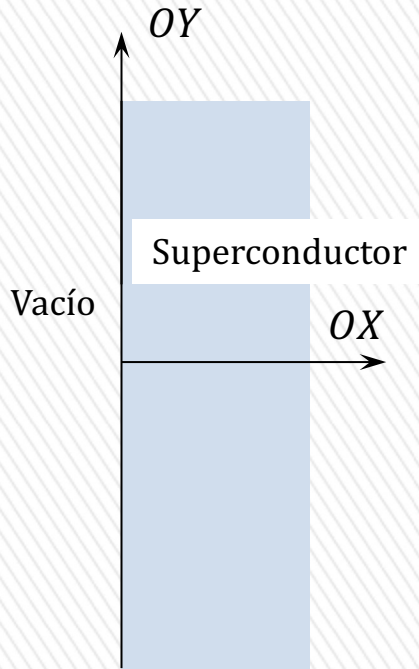
$$\nabla \times \vec{j} + \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Ecuaciones de London

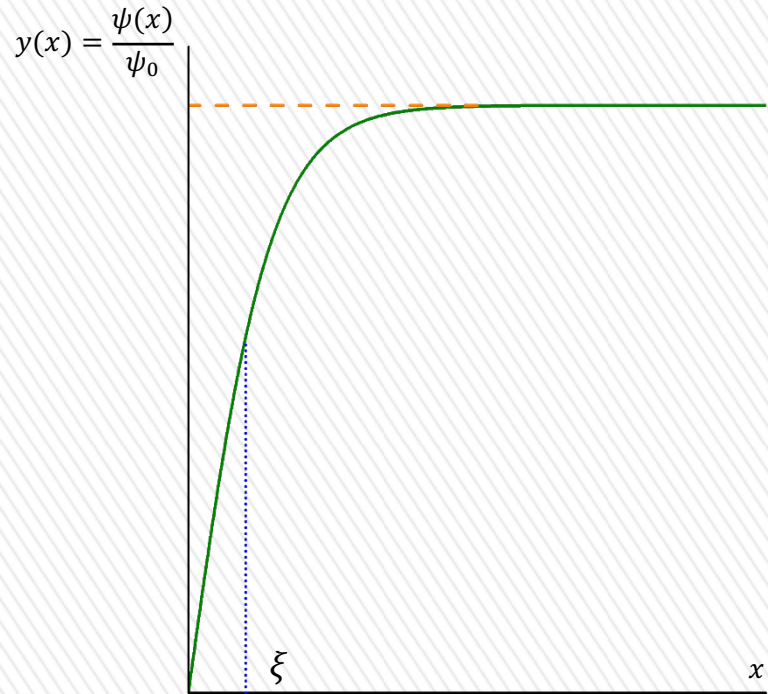
La teoría de Ginzburg – Landau es consistente con el efecto Meissner-Oschenfeld

$$\lambda_L = \left(\frac{m^*}{\mu_0 |\psi_0|^2 e^{*2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{m^* \beta}{\mu_0 e^{*2} |\alpha|} \right)^{1/2} \propto (T_c - T)^{-1/2}$$

LONGITUD DE COHERENCIA



$$y(x) = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi}$$



Campo nulo

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha\psi(x) + \beta\psi(x)^3 = 0$$

$$\xi^2(T) \frac{d^2y(x)}{dx^2} + y - y^3 = 0$$

$$y(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_0}$$

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}$$

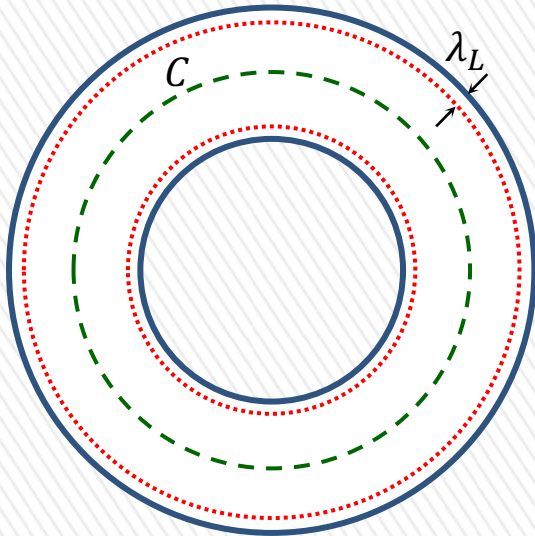
$$y(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$$

$$\xi(T) \propto (T_c - T)^{-1/2}$$

$$\xi(0) \approx \left(\frac{\hbar}{2m^*aT_c} \right)^{1/2}$$

CUANTIZACIÓN DEL FLUJO MAGNÉTICO



$$-i \frac{\hbar}{2e^*} [\psi^*(\vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \nabla \psi^*(\vec{r})] = |\psi(\vec{r})|^2 \vec{A}(\vec{r})$$

$$\frac{\hbar}{e^*} \nabla \theta(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$$

$$\frac{\hbar}{e^*} \oint_C \nabla \theta(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dS = \phi_m$$

$$\oint_C \nabla \theta(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 2\pi p$$

$$\phi_m = \frac{\hbar}{e^*} 2\pi p = \frac{h}{e^*} p$$

Numerosos resultados experimentales indican que

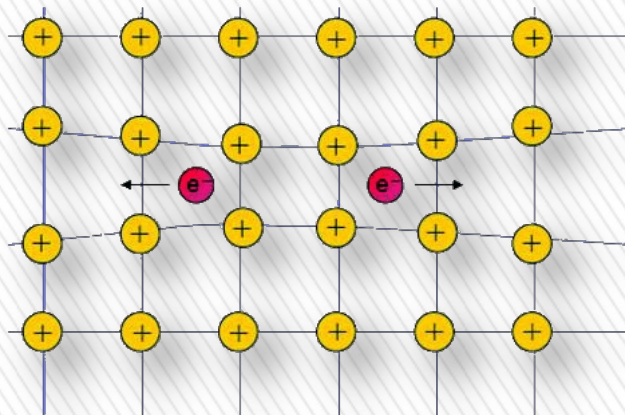
$$e^* = 2e$$

PARES DE COOPER

- La superconductividad se debe a una **nueva fase (menos entrópica)** del gas de electrones.
- Los portadores de carga en la fase superconductor son **pares de electrones**.
- Existe un **gap** en el espectro electrónico de energías.
- La red está involucrada en la superconductividad (**efecto isotópico**).

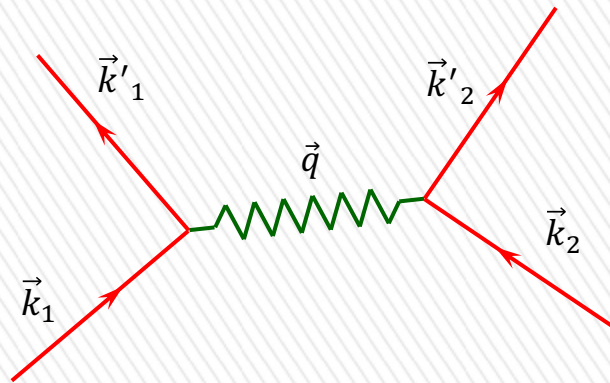
El estado fundamental es inestable si los electrones están sometidos a una atracción mutua

Inestabilidad de Cooper



Par de Cooper

PARES DE COOPER



Dispersión de un electrón emitiendo un fonón

$$\vec{k}_1 = \vec{k}'_1 + \vec{q}$$

Dispersión de otro electrón absorbiendo el fonón

$$\vec{k}_2 + \vec{q} = \vec{k}'_2$$

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2 = \vec{K}$$

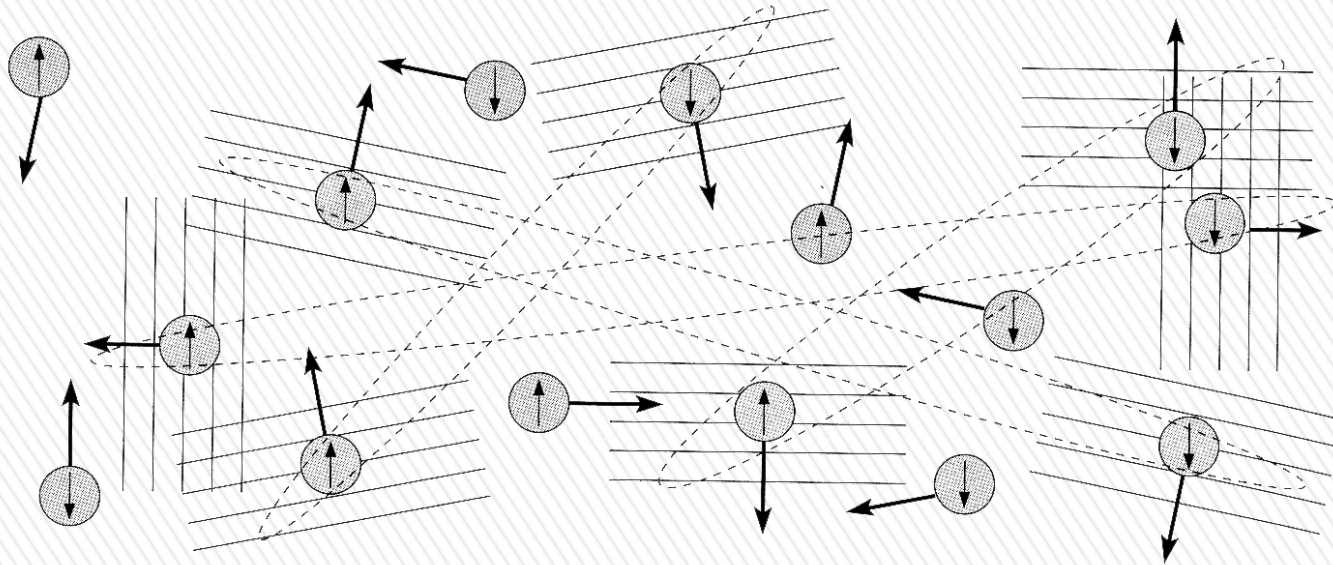
- El fonón puede tener una energía η arbitraria siempre que su tiempo de vida verifique

$$\tau \sim \frac{\hbar}{\eta}$$

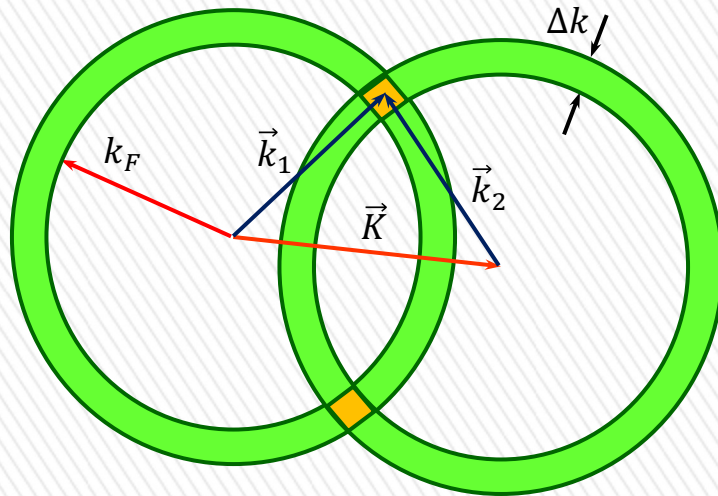
- La polarización de la red está **retardada** con respecto al movimiento del primer electrón

$$\Delta x \sim 1000 \text{ \AA}$$

PARES DE COOPER



HAMILTONIANO DE FRÖHLICH Y PARES DE COOPER



$$\Delta k \approx \frac{\omega_D}{v_s}$$

El solapamiento es máximo para $\vec{K} = \vec{0}$

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\varepsilon + 2\varepsilon_F)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$

Se debe verificar:

$$\varepsilon_F - \hbar\omega_D < \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} < \varepsilon_F + \hbar\omega_D$$

$$g(\vec{k}) = 0 \text{ para } \begin{cases} k < k_F \\ k > \sqrt{\frac{2m_e(\varepsilon_F + \hbar\omega_D)}{\hbar^2}} \end{cases}$$

HAMILTONIANO DE FRÖHLICH Y PARES DE COOPER

$$\sum_{\vec{k}'} \left[\frac{\hbar^2}{2m_e} 2k'^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] g(\vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{\rho}} = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') e^{i\vec{k}' \cdot \vec{\rho}}$$

Supongamos que el potencial depende sólo de $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\frac{\hbar^2}{m_e} k^2 g(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') V_{\vec{k}\vec{k}'} = (\varepsilon + 2\varepsilon_F) g(\vec{k})$$

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{1}{L^3} \int_{L^3} V(\vec{\rho}) e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{\rho}} d\vec{\rho}$$

Ecuación de Bethe-Goldstone

$$V_{\vec{k}\vec{k}'}^{fonón}(\vec{q}) = \frac{g^2 \hbar \omega_{\vec{q}}}{(\varepsilon_{\vec{k}'} - \varepsilon_{\vec{k}})^2 - (\hbar \omega_{\vec{q}})^2}$$

Hamiltoniano de Fröhlich

HAMILTONIANO DE FRÖHLICH Y PARES DE COOPER

$$V_{\vec{k}\vec{k}'}^{fonón} = \begin{cases} -V_0 & \text{para } \varepsilon_F - \hbar\omega_D < \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_e} \right) < \varepsilon_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(\vec{k}) = -\frac{V_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_F - \frac{\hbar^2 k^2}{m_e}} \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') \quad \longrightarrow \quad 1 = V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m_e} - 2\varepsilon_F - \varepsilon} \quad \longrightarrow \quad 1 = \frac{V_0}{8\pi^3} \int_S \frac{1}{2\xi - \varepsilon} d\vec{k}$$

Densidad de estados electrónicos con espín dado $\mathcal{N}(\xi) = \frac{1}{2} g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S(\xi)} \frac{dS}{|\nabla_{\vec{k}} \xi|}$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{\xi} \frac{g(\xi)}{2\xi - \varepsilon} d\xi \approx \frac{V_0 g(\varepsilon_F)}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{2\xi - \varepsilon} = \frac{1}{4} V_0 g(\varepsilon_F) \ln \left(\frac{\varepsilon - 2\hbar\omega_D}{\varepsilon} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{2\hbar\omega_D}{1 - \exp\left(\frac{4}{V_0 g(\varepsilon_F)}\right)} \approx -2\hbar\omega_D e^{-\frac{4}{V_0 g(\varepsilon_F)}} < 0$$

TEORÍA BCS

El estado superconductor no puede estar formado sólo por pares de Cooper.

Estado general de un par de Cooper

$$|\vec{k}\rangle = u_{\vec{k}}|0\rangle + v_{\vec{k}}|\psi_{\vec{k}}\psi_{-\vec{k}}\rangle = \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger}c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger}\right)|0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{-\vec{k}} \quad |u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$$

Estado fundamental BCS

$$|\Phi_{BCS}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger}c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger}\right)|0\rangle$$

Energía cinética

$$K = \sum_{\vec{k}\sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^0 c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} = \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \hat{N}_{\vec{k}\sigma}$$

Energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} V_{\vec{k}, \vec{k}'} c_{\vec{k}\sigma_1}^{\dagger} c_{-\vec{k}-\sigma_1}^{\dagger} c_{\vec{k}'\sigma_2} c_{-\vec{k}'-\sigma_2}$$

Hamiltoniano

$$H_{red} = \sum_{\vec{k}\sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^0 c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\sigma\sigma'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{-\vec{k}-\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}'\sigma'} c_{-\vec{k}'-\sigma'}$$

TEORÍA BCS

$$B = \langle \Phi_{BCS} | H_{red} | \Phi_{BCS} \rangle - \mu [\langle \Phi_{BCS} | \hat{N} | \Phi_{BCS} \rangle - N] - \sum_{\vec{k}} \lambda_{\vec{k}} (|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 - 1)$$

$$B = \sum_{\vec{k}} 2\xi_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 + \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}'}^* u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}} - \sum_{\vec{k}} \lambda_{\vec{k}} (|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 - 1) + \mu N$$

$$\frac{\partial B}{\partial u_{\vec{k}}} = \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} v_{\vec{k}'}^* u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}} - \lambda_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^* = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial v_{\vec{k}}^*} = 2\xi_{\vec{k}} v_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}'} - \lambda_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \lambda_{\vec{k}}} = 1 - |u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2 = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial \mu} = N - 2 \sum_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 = 0$$

TEORÍA BCS

$$(2) \cdot u_{\vec{k}}^* - (1) \cdot v_{\vec{k}} \quad \longrightarrow \quad 2\xi_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} - (|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2) \Delta_{\vec{k}} = 0$$

$$2\xi_{\vec{k}} v_{\vec{k}} (1 - |v_{\vec{k}}|^2)^{1/2} - (1 - 2|v_{\vec{k}}|^2) \Delta_{\vec{k}} = 0$$

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

$$v_{\vec{k}} = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{1/2} e^{i\varphi_{\vec{k}}} \quad \longrightarrow \quad \xi_{\vec{k}}^2 (1-x^2) = x^2 |\Delta_{\vec{k}}|^2 \quad \longrightarrow$$

$$x = \pm \frac{\xi_{\vec{k}}}{(\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2)^{1/2}}$$

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{(\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2)^{1/2}} \right]$$

$$|v_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{(\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2)^{1/2}} \right]$$

$$u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{(1 - 2|v_{\vec{k}}|^2)}{2\xi_{\vec{k}}} \Delta_{\vec{k}} = \frac{\Delta_{\vec{k}}}{2(\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2)^{1/2}}$$

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2(\xi_{\vec{k}'}^2 + |\Delta_{\vec{k}'}|^2)^{1/2}}$$

Ecuación del gap

TEORÍA BCS

Solución trivial

$$\Delta_{\vec{k}} = 0 \quad \begin{cases} u_{\vec{k}} = 0 \\ v_{\vec{k}} = 1 \end{cases} \text{ para } \varepsilon_{\vec{k}}^0 < \mu$$

$$\begin{cases} u_{\vec{k}} = 1 \\ v_{\vec{k}} = 0 \end{cases} \text{ para } \varepsilon_{\vec{k}}^0 > \mu$$

$$|\Phi_{BCS}\rangle = \prod_{k < k_F} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle$$

Conductor ordinario

Soluciones no triviales

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -V_0 & \text{para } |\xi_{\vec{k}}| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{V_0}{2} \sum_{\vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{(\xi_{\vec{k}'}^2 + |\Delta_{\vec{k}'}|^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta(\vec{k}) = \frac{V_0}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \hbar\omega_D} \frac{\Delta(\vec{k}')}{[\xi^2(\vec{k}') + |\Delta(\vec{k}')|^2]^{1/2}} d\vec{k}'$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \frac{1}{8\pi^3} \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \hbar\omega_D} \frac{1}{[\xi^2(\vec{k}') + |\Delta|^2]^{1/2}} d\vec{k}'$$

TEORÍA BCS

En el límite $\hbar\omega_D \ll \mu$

$$\frac{4}{V_0} = \int_{\mu-\hbar\omega_D}^{\mu+\hbar\omega_D} \frac{g(\varepsilon)}{[(\varepsilon - \mu)^2 + |\Delta|^2]^{1/2}} d\varepsilon \approx g(\mu) \int_{\mu-\hbar\omega_D}^{\mu+\hbar\omega_D} \frac{1}{[(\varepsilon - \mu)^2 + |\Delta|^2]^{1/2}} d\varepsilon$$

$$|\Delta| = \hbar\omega_D \left\{ \sinh \left(\frac{2}{g(\mu)V_0} \right) \right\}^{-1}$$

Límite de acoplamiento débil $g(\mu)V_0 \approx 0$

$$|\Delta| \approx 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{g(\mu)V_0}}$$

SIGNIFICADO FÍSICO DEL GAP DE ENERGÍAS

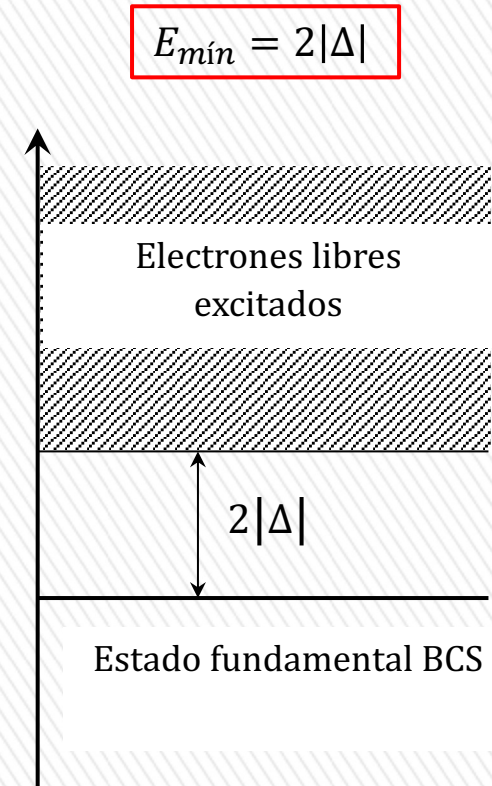
Energía del estado fundamental

$$\begin{aligned} E_{BCS}^0 &= 2 \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 + \Delta \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* \\ &= -2 \sum_{\vec{k}} (\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta|^2)^{1/2} |v_{\vec{k}}|^4 \end{aligned}$$

Energía del primer estado excitado

$$E_{BCS}^1 = -2 \sum_{\vec{k} \neq \vec{k}'} (\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta|^2)^{1/2} |v_{\vec{k}}|^4$$

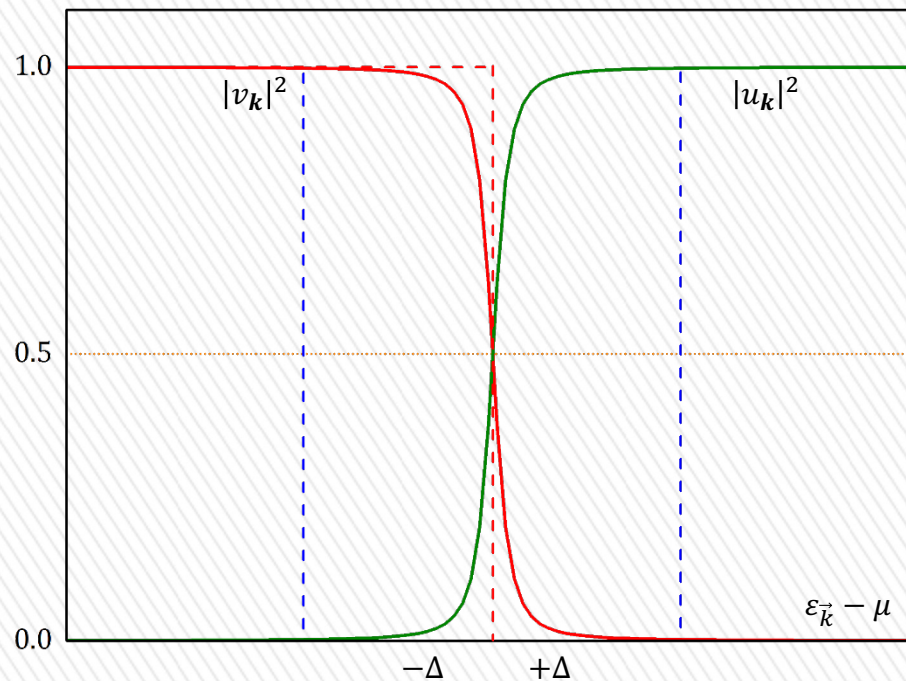
$$E_{exc} = E_{BCS}^1 - E_{BCS}^0 = 2(\xi_{\vec{k}'}^2 + |\Delta|^2)^{1/2}$$



OTRAS CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA BCS

Probabilidad de encontrar un par de Cooper excitado

$$|v_{\vec{k}}|^2 = \begin{cases} 1 & \varepsilon_{\vec{k}} - \mu < -\hbar\omega_D \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\vec{k}} - \mu}{[(\varepsilon_{\vec{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2]^{1/2}} \right) & |\varepsilon_{\vec{k}} - \mu| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \varepsilon_{\vec{k}} - \mu > \hbar\omega_D \end{cases}$$

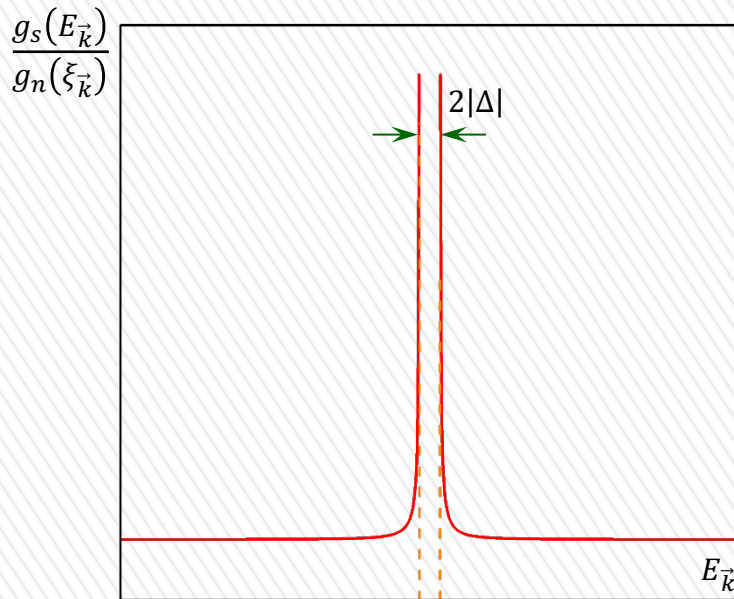


OTRAS CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA BCS

Densidad de estados

$$g_n(\xi_{\vec{k}})d\xi_{\vec{k}} = g_s(E_{\vec{k}})dE_{\vec{k}}$$

$$\frac{g_s(E_{\vec{k}})}{g_n(\xi_{\vec{k}})} = \frac{E_{\vec{k}}}{(E_{\vec{k}}^2 - |\Delta|^2)^{1/2}}$$



Potencial químico

$$N_{BCS} = 2 \sum_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 = \int_0^{\infty} D_s(\varepsilon) |v(\varepsilon)|^2 d\varepsilon$$

$$= N_e$$

$$\mu = \varepsilon_F$$

Energía por unidad de volumen

$$e_{BCS} = k^0 + \frac{1}{2} g(\mu) \hbar^2 \omega_D^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{|\Delta|^2}{(\hbar \omega_D)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

$$e_{BCS} - k^0 \approx -\frac{1}{4} g(\mu) |\Delta|^2$$

SUPERCORRIENTES Y VALORES CRÍTICOS

$$\vec{j}_s = -n_s e \vec{v} = -\frac{n_s e \hbar}{m_e} \vec{k} \longrightarrow \frac{1}{2} \vec{K} = -\frac{m_e}{n_s e \hbar} \vec{j}_s \quad (\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow) \longrightarrow \left(\vec{k} + \frac{1}{2} \vec{K} \uparrow, -\vec{k} + \frac{1}{2} \vec{K} \downarrow \right)$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2} = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} \psi(\vec{r}, \vec{K} = \vec{0}) \quad \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 \end{array}$$

La corriente cambia la función de onda en un factor de fase global.

Las corrientes establecidas en un superconductor sólo pueden decaer mediante excitaciones electrónicas inelásticas de energía mayor que 2Δ , o bien mediante excitaciones elásticas

$$\Delta\phi_m = n \frac{h}{2e}$$

Las corrientes se mantienen

Corriente crítica

$$\Delta\varepsilon = \frac{\hbar^2 K^2}{8m_e} + \frac{\hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{K}}{2m_e} \approx \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 k_F K}{m_e} = \frac{\hbar k_F}{e n_s} j_s$$

$$2\Delta\varepsilon = 2\Delta$$

$$j_c \approx \frac{e n_s \Delta}{\hbar k_F}$$

Campo crítico

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = \int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \hat{n} dS = 2\pi r \lambda_L j_s^0$$

$$H_c = \lambda_L j_c^0 \approx \lambda_L \frac{e n_s \Delta}{\hbar k_F}$$

EL EFECTO MEISSNER - OCHSENFELD

El estado fundamental BCS consiste en una superposición de pares de Cooper que tienen la misma energía

$$2\Delta \sim \delta \left(\frac{p^2}{2m_e} \right) \approx \frac{p_F}{m_e} \delta p$$

$$\xi_{PC} = \delta x \sim \frac{\hbar}{\delta p} \approx \frac{\epsilon_F}{k_F \Delta}$$

$$\xi(0) > \xi_{PC}$$

Formalmente, se puede describir como un condensado de Bose-Einstein de pares de Cooper

$$\Phi_{BCS} \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_1} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_2} \dots e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_v} \dots \psi(\vec{K} = \vec{0}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_v, \dots) \approx e^{iN_{PC}\vec{K} \cdot \vec{R}} \psi(\vec{0}) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} \psi(\vec{0})$$

$$\vec{R} = \frac{1}{N_{PC}} \sum_v \vec{R}_v \quad \vec{K} = N_{PC} \vec{K}$$

Densidad de corriente

$$\vec{j}_s = -\frac{e}{2m_e} (\Phi_{BCS} \vec{p}^\dagger \Phi_{BCS}^* + \Phi_{BCS}^* \vec{p} \Phi_{BCS}) \quad \vec{p} = -i\hbar \nabla_{\vec{R}} + 2eN_{PC} \vec{A}$$

$$\vec{j}_s = -\frac{e}{2m_e L^3} (4eN_{PC} \vec{A} + 2\hbar \vec{K})$$

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m_e} \vec{B}$$

ESTADOS EXCITADOS EN LA TEORÍA BCS

Transformación de Bogoliubov-Valatin

$$\alpha_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger$$

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} - v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger$$

$$\alpha_{\vec{k}} |\Phi_{BCS}\rangle = 0$$

$$\langle \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} \rangle = n_{\vec{k}}(T)$$

$$F = \langle H_{red} \rangle - TS$$

$$\langle K \rangle = \sum_{\vec{k}} 2\varepsilon_{\vec{k}}^0 \left\{ |v_{\vec{k}}|^2 + \left(u_{\vec{k}}^2 - |v_{\vec{k}}|^2 \right) n_{\vec{k}}(T) \right\}$$

$$S = -2k_B \sum_{\vec{k}} \left[n_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}} + (1 - n_{\vec{k}}) \ln (1 - n_{\vec{k}}) \right]$$

$$\langle V \rangle = \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}, [1 - 2n_{\vec{k}}(T)][1 - 2n_{\vec{k}'}(T)]$$

$$\langle N \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \left\{ |v_{\vec{k}}|^2 + \left(u_{\vec{k}}^2 - |v_{\vec{k}}|^2 \right) n_{\vec{k}}(T) \right\}$$

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{\left(\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2 \right)^{1/2}} \right)$$

$$|v_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{\left(\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2 \right)^{1/2}} \right)$$

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} (1 - 2n_{\vec{k}'})$$

ESTADOS EXCITADOS EN LA TEORÍA BCS

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \frac{1 - 2n_{\vec{k}'}}{2E_{\vec{k}'}} \Delta_{\vec{k}'}$$

$$\Delta(\vec{k}) = \frac{V_0}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\xi_{\vec{k}}| < \hbar\omega_D} \frac{\Delta(\vec{k}') [1 - 2n_{\vec{k}'}]}{(\xi^2(\vec{k}') + |\Delta(\vec{k}')|^2)^{1/2}} d\vec{k}'$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{V_0 g(\mu)} &= \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{((\varepsilon - \mu)^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}} - 2 \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} \frac{n [((\varepsilon - \mu)^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}]}{((\varepsilon - \mu)^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}} d\varepsilon = \\ &= 2 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{(\xi^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}} d\xi - 4 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{n [(\xi^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}]}{(\xi^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}} d\xi \quad \xi = \varepsilon - \mu \\ \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{|\Delta(0)|}\right) &= \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{|\Delta(T)|}\right) - 2 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{n [(\xi^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}]}{(\xi^2 + |\Delta(T)|^2)^{1/2}} d\xi \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{|\Delta(T)|}{|\Delta(0)|}\right) = -2 \int_0^{\infty} \frac{n \left[\sqrt{x^2 + 1} \frac{|\Delta(T)|}{|\Delta(0)|} \frac{|\Delta(0)|}{k_B T} \right]}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$x = \frac{\xi}{|\Delta(T)|} \quad \frac{|\Delta(T)|}{|\Delta(0)|} \quad \text{Gap reducido}$$

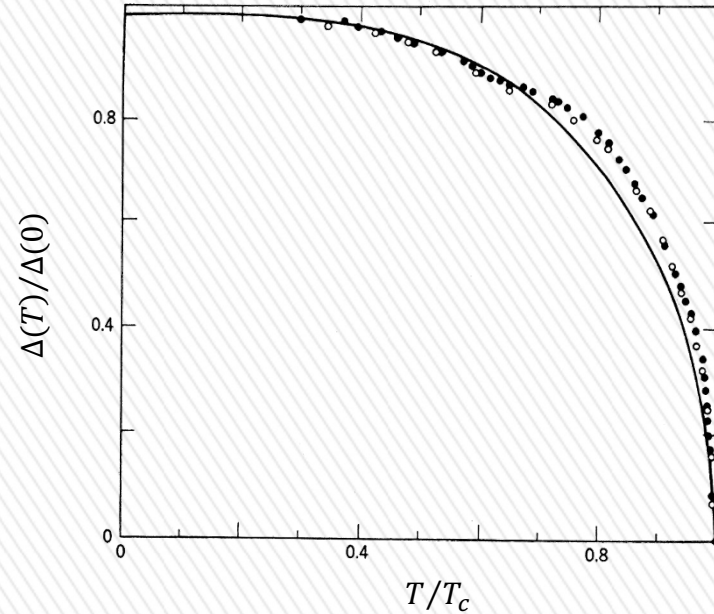
$$\frac{k_B T}{|\Delta(0)|} \quad \text{Temperatura reducida}$$

ESTADOS EXCITADOS EN LA TEORÍA BCS

$$\Delta(T_c) = 0$$

$$k_B T_c = 0.57 |\Delta(0)|$$

$$k_B T_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-\frac{2}{V_0 g(\epsilon_F)}}$$



$$C = T \frac{dS}{dT}$$

$$C \approx \sqrt{8\pi} g(\mu) |\Delta(T)| \left(\frac{|\Delta(T)|}{k_B T} \right)^{3/2} e^{-|\Delta(T)|/k_B T}$$