PROBLEMAS

1 Si la masa inercial m_{iner} fuese distinguible de la gravitacional m_{grav}, ¿Cuál sería el periodo T de un péndulo simple de longitud l situado a una distancia r de una masa esférica M_{grav}? ¿ Se vería afectado el periodo de un péndulo de torsión?

2 Supóngase que la masa pudiera tomar tanto valores positivos como negativos. Discutir el movimiento de los cuerpos, inicialmente en reposo, abandonados a su interacción gravitatoria en los casos:

a) $m_1 = m_2 > 0$.

b) $m_1 = m_2 < 0$.

c) $m_1 = -m_2 > 0$.

¿ Qué ocurre con la conservación del momento lineal en el caso c)?

3 Calcular la masa de Saturno, sabiendo que su satélite Mimas (hasta hace poco el más interno conocido) tiene una órbita prácticamente circular (excentricidad $e = 0.0202$), de radio $R = 185.52 \cdot 10^3$ Km, y periodo $T = 0.942422$ días.

4 En 1930 se descubre Plutón, y en 1978 su satélite Caronte. En junio de 1980 logró medirse el radio de la órbita, casi circular (excentricidad $e < 0.001$), de Caronte: $R = 19.6 \cdot 10^3$ Km y también su periodo $T = 6.38725$ días. Los diámetros de Plutón y de Caronte son respectivamente $d_{\text{Pluton}} = 2300$ Km y $d_{\text{Caronte}} = 1186$ Km. Suponiendo que las densidades de Plutón y Caronte son aproximadamente iguales, calcular la masa conjunta del sistema y sus densidades.

5 Hiparco (129 a. c.) midió la distancia Tierra-Luna ($d_{\text{T}-\text{L}}$) por paralaje. En 1672, Cassini y Richer midieron del mismo modo la distancia Tierra-Marte ($d_{\text{T}-\text{M}}$) utilizando una base de 10^4 Km (París-Cayena). Demostrar que, conociendo ($d_{\text{T}-\text{M}}$) y los periodos de la Tierra y de Marte y suponiendo que las órbitas son aproximadamente circulares, es posible calcular la distancia Sol-Tierra.

6 Tomando como línea base el radio ecuatorial de la Tierra, expresar las distancias a la Tierra para cuerpos del sistema solar en función del paralaje.

7 Supóngase una galaxia de una masa M_{G} prácticamente concentrada en su núcleo de radio R_{G}. Pruébese que la velocidad orbital $v(r)$ de una estrella a una distancia r del centro de la galaxia satisface:

a) $v(r) \propto r$ si $r < R$.

a) $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ si $r > R$.

8 Estimar cuánto deberían diferir las cargas del electrón y del protón para que la repulsión electrostática Tierra-Luna cancelase su atracción gravitacional. (Suponed por sencilled que ambos cuerpos están compuestos de Hidrógeno).

9 Consideremos una partícula de polvo en órbita alrededor del Sol. Ignorando los efectos del viento solar y de los campos magnéticos estímese el tamaño mínimo que una partícula de polvo (de densidad la del agua) puede tener para evitar ser expulsada del sistema solar. Datos: $M_{\mathrm{S}} = 1.9891 \cdot 10^{30}$ kg; $L_{\mathrm{S}} = 3.826 \cdot 10^{33}$ erg/s.

10 En las mismas condiciones del problema anterior, partículas con un tamaño mayor que el mínimo estimado anteriormente caerán en espiral alrededor del Sol. ¿ Cuál es el origen de este arrastre? Estímese la vida media de una tal partícula de polvo en órbita solar a una distancia igual a la distancia Tierra-Sol ($d_{\mathrm{T-S}} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m).

11 Un objeto parece estelar si subtiende un ángulo $\leq 1''$. ¿ A qué distancia tendrá ese aspecto nuestra galaxia?

12 Un pequeño satélite gira, con pulsación ω, alrededor de una masa central M, a distancia r. Demostrar que el conocimiento de ω no permite la determinación individual ni de M ni de r, sino de la llamada "densidad de Kepler" de la masa central promediada sobre la esfera de radio r.

13 Supóngase un conductor cerrado, con vacio en su interior, y perfecto (cargas positivas rígidas y electrones de conducción totalmente móviles). Colóquese un electrón en el centro del hueco interior. Todo ello en un campo gravitatorio uniforme y estático. ¿ Hacia donde se mueve el electrón? ¿ Qué ocurre si en lugar de un electrón consideramos un protón?

14 Consideramos un objeto extenso de masa M sobre el que actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_i$. Usando la equivalencia entre masa gravitacional y la energía, mostrar que la condición de equilibrio para el cuerpo es

$$\sum_i \mathbf{F}_i \left(1 - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_i}{c^2}\right) = -M\mathbf{g}$$

donde $\mathbf{g}$ es la aceleración de la gravedad y $\mathbf{x}_i$ son los puntos de aplicación de cada fuerza, medidos en un sistema inercial local.

15 En un determinado espacio, aparentemente tres dimensional, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos viene dada por $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - (3\mathrm{d}x + 4\mathrm{d}y + 12\mathrm{d}z)^2/169$. Probar que en realidad tal espacio es localmente $\mathbf{R}^2$. Encontrar dos nuevas coordenadas, η y ξ, para las cuales el elemento de línea toma la forma $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\xi^2$.

16 Consideremos el par (M,d) donde M es el espacio $M = \{(n_1,n_2) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\}$ (red cuadrada bidimensional) y d es una distancia definida en M como sigue: dados P_1, $P_2 \in M$, $d(P_1,P_2)$ es el número de lados del camino mas corto que une P_1 y P_2. Se pide

1. Dibujar una circunferencia de radio 4.

2. Calcular el número π en esta geometría. ¿ Es irracional?

17 El plano $\mathbf{R}^2$, en coordenadas polares, tiene como longitud de arco $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$. Calcular en estas coordenadas sus símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.

18 Dada la métrica $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}t^2)/t^2$, calcular los coeficientes de la conexión afín asociada y las curvas geodésicas de género tiempo.

19 Considérese la métrica de Poincaré $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)/y^2$ definida en el semiplano superior $y > 0$. Determinar las geodésicas. Calcular el escalar de curvatura y compárese con el correspodiente a una 2-esfera.

20 Probar que si una geodésica es de genero tiempo en alguno de sus puntos, lo es en todos. (Idem para género luz y espacio).

21 Un vector se dice de Killing si satisface $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$. Demostrar que es posible construir cantidades conservadas considerando objetos del tipo $u^\mu\xi_\mu$, donde u^μ es la cuadrivelocidad de la partícula.

22 Sea la ecuación geodésica

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

donde λ es un parámetro afín. Probar que cualquier otro parámetro afín (es decir tal que la ecuación geodésica mantiene su estructura tras su cambio al nuevo parámetro) es necesariamente una función lineal de λ.

23 Demostrar que el número de componentes independientes del tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ en un espacio de dimensión d es $d^2(d^2-1)/12$.

24 ¿ Cuál es el tensor de Riemann para una variedad de dimensión 1? Expresar el tensor de Riemann en términos de la métrica y del tensor de Ricci en el caso bidimensional y tridimensional.

25 Demostrar que la métrica $\mathrm{d}s^2 = y^2\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}y^2$ representa una superficie plana, mientras que la métrica $\mathrm{d}s^2 = y\mathrm{d}x^2 + x\mathrm{d}y^2$ corresponde a una superficie curvada.

26 En 1964, Pound y Snider mandaron una señal luminosa desde la parte superior de una torre de 22.6 m de altura hacia la base. a) Estimar el corrimiento Doppler gravitacional medido en la base de la torre $\Delta\nu/\nu$, b) ¿ Se desplazará hacia el rojo o hacia el azul?

27 La generalización de las ecuaciones de Maxwell a un espacio-tiempo curvo via el principio de equivalencia (Principio de Acoplo Gravitatorio Mínimo o PAGM) es ambigua. Para comprobarlo, mostrar que el uso de esta regla con el potencial vector A^μ conduce a resultados diferentes para una ecuación relativista.

28 Si aplicamos el PAGM a $\partial^2 A_\mu = -j_\mu, \partial^\mu A_\mu = 0$, estimar el error relativo inducido en las ecuaciones de Maxwell (aplicadas a un proceso terrestre con frecuencia característica ν y tamaño l) debido a este acoplo gravitacional.

29 Partiendo del tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ para una partícula en caida libre , probar que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ si y solo si el movimiento es geodésico.

30 El tensor de energía-momento de un campo escalar sin masa es $T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi$. Deducir la ecuación del campo ϕ imponiendo $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

31 Para todas las ecuaciones de estado conocidas, las presiones principales $p_i(i = 1, 2, 3)$, cumplen $\sum_i p_i \leq T^{00} = \rho$. Un cierto observador encuentra que la curvatura escalar R en una determinada región del espacio-tiempo es prácticamente constante. ¿ Qué signo tiene R? ¿ Cuánto vale R si en esa región solo hay campos electromagnéticos?

32 Formar unidades de masa, longitud y tiempo a partir de las constantes físicas $\hbar, G$ y c.

33 Una forma un poco mas general de las ecuaciones de Einstein es

$$R_{\mu\nu} - a g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

donde a es una constante adimensional. Mostrar que si $a \neq 1/2$, las ecuaciones de campo no concuerdan con el experimento ni siquiera en el límite newtoniano.

34 Nordström ideó en 1913 una teoría de la gravitación que relaciona $g_{\mu\nu}$ con $T_{\mu\nu}$ por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \mathrm{e}^{2\phi}\eta_{\mu\nu} \\ R &= \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde ϕ es un escalar. Mostrar que esta teoría, en el límite newtoniano y con la elección adecuada de κ, reproduce la teoría newtoniana de la gravitación, pero que no predice la deflexión de la luz a su paso cerca del Sol.

35 Probar que el momento angular total al cuadrado

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

es una constante de movimiento a lo largo de una geodésica en la geometría de Schwarzschild.

36 Demostrar que la ecuación de movimiento de Newton para una partícula sometida a un potencial gravitatorio puede escribirse como una geodésica en un espacio-tiempo en 4 dimensiones. Calcular los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann y muéstrese que no son derivables de una métrica.

37 Probar que todas las órbitas en una geometría Schwarzschild son planarias y estables.

38 Probar que la métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \frac{4}{9}\left[\frac{9M}{2(r-t)}\right]^{2/3}\mathrm{d}r^2 + \left[\frac{9M}{2}(r-t)^2\right]^{2/3}\mathrm{d}\Omega^2$$

(que parece dinámica ya que los coeficientes dependen de t) es realmente estática. Probar que en realidad se trata de la métrica de Schwarzschild.

39 Una partícula cae radialmente en una geometría de Schwarzschild. ¿ Cuál es la velocidad coordenada $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ en función del radio de curvatura r? ¿ Cuál es la velocidad medida localmente relativa a un observador estacionario situado en el mismo radio?

40 Obtener las ecuaciones del movimiento (ecuaciones que relacionan t, r y τ) de una partícula que cae radialmente en la geometría de Schwarzschild. Considérense los siguientes tres casos: i) Partícula que se deja caer en reposo desde $r = R$. ii) Partícula que se deja caer en reposo desde $r = \infty$. iii) Partícula que se deja caer desde $r = \infty$ con velocidad v_∞.

41 Obtener una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para la trayectoria (r como función de ϕ) para las órbitas ecuatoriales en la geometría de Schwarzschild.

42 Mostrar que la trayectoria de los rayos de luz en la métrica de Schwarzschild obedecen a la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = 3u^2$$

donde $u \equiv M/r$ y r es la coordenada Schwarzschild radial. Denotemos por b el mínimo valor de r a lo largo de la trayectoria (es decir, el parámetro de impacto). En el caso $M/b \ll 1$, ¿cuál es la deflexión que sufre un fotón cuando pasa cerca de un objeto gravitatorio esférico? Obténgase una fórmula para el ángulo de deflexión en el orden mas pequeño en M/b.

43 Un astronauta A orbita circularmente alrededor de un pulsar de masa M, con coordenada radial $r = 4M$. Otro astronauta B ha sido enviado radialmente desde la superficie del pulsar con velocidad inferior a la de escape. En su ascenso, B se cruza con A, y aprovechan el momento para sincronizar sus relojes. Tras llegar al máximo de su ascensión B cae radialmente, y de nuevo se cruza con A, quien desde el encuentro anterior ha completado diez órbitas. ¿En cuánto diferirán ahora sus relojes?

44 Calcular la deflexión gravitacional de la luz de un rayo al pasar cerca del Sol usando la gravedad newtoniana y el hecho de que la luz se mueve a lo largo de líneas rectas en el referencial local de un observador en caida libre. Como la luz está siempre en un campo gravitacional débil, la aproximación newtoniana parece justificable. ¿Por qué no concuerda este cálculo con la relatividad general?

45 Mostrar que las ecuaciones de la gravedad newtoniana y la hidrodinámica no admiten una cosmología que sea isótropa, homogénea y estática.

46 Considérese un espacio-tiempo que no contiene materia y es isótropo en todas partes. Probar que se trata del espacio de Minkowski plano.

47 Consideremos un modelo de universo asociado a la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2\alpha}\mathrm{d}x^2 + t^{2\beta}\mathrm{d}y^2 + t^{2\gamma}\mathrm{d}z^2$$

donde α, β y γ.

1. Discutir si este modelo es compatible con el Principio Cosmológico.
2. Encontrar las relaciones que deben de satisfacer α, β y γ para que el modelo esté vacio de materia.
3. Supongamos que las constantes α, β y γ son diferentes de cero. Mostrar que un universo vacío de este tipo no es compatible con las propiedades de la radiación de fondo observada experimentalmente.

48 Sabiendo que nuestro universo está en expansión, a un ritmo actual dado por la constante de Hubble $H_0 \equiv \mathrm{d}\log R(t)/\mathrm{d}t|_{t=t_0}$, donde $R(t_0)$ es una longitud de escala en el momento presente, estimar a que ritmo deberían crearse espontáneamente átomos de hidrógeno para que la densidad actual $\rho_0 \simeq 3{\cdot}10^{-30}$ g/cm^3 permaneciese constante. Asumir $H_0 = (65 \pm 5)$ Km/(s Mpc).

49 Demostrar que un observador moviéndose con velocidad β $(c = 1)$ en una dirección θ relativa al fondo cósmico de microondas vería la radiación de un cuerpo negro en reposo a temperatura T a una temperatura

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}.$$

donde $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. El desarrollo de la precedente fórmula en primer orden en β proporciona la anisotropía dipolar que ha sido observada: $T(\theta) = T_0 + A\cos\theta$, donde $A = 3.372 \pm 0.0035$ mK y $T_0 = 2.728 \pm 0.002$ K. Usando este dato estimar la velocidad del Sol relativa al fondo cósmico de microondas. Comparar el resultado obtenido con la velocidad del sistema solar en el grupo local que ha sido estimada en 315 km/s.

50 La sección eficaz de captura de un neutrino por un nucleón es aproximadamente $\sigma \simeq 10^{-48}\mathrm{m}^2$ (mediada a todas las energías del neutrino). Si la densidad en el centro del Sol es $\rho \simeq 10^5 \mathrm{Kg/m}^3$ estimar el recorrido libre medio de un neutrino en el centro del Sol.

51 La sección eficaz electrodébil (incluye todas las reacciones en las que se producen, destruyen y son dispersados neutrinos) es aproximadamente:

$$\sigma \simeq \frac{G_F^2 (k_{\mathrm{B}}T)^2}{\pi(\hbar c)^4}$$

donde G_F es la constante de Fermi de las interacciones débiles ($G_F/(\hbar c)^3 = 1.16639 \cdot 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$). Estimar a qué temperatura se desacoplarán los neutrinos del resto de las interacciones.