

El modelo de Ising en un campo magnético aleatorio (RFIM)

Juan J. Ruiz-Lorenzo

Departamento de Física
Universidad de Extremadura

Instituto de Biocomputación y
Física de los Sistemas Complejos [BIFI](UZ)

`ruiz@unex.es`

`http://www.unex.es/fisteor/juan`

Zaragoza 27 Mayo 2004.

Sumario

1. Experimentos en el modelo de Ising antiferromagnético diluido en presencia de un campo magnético externo
2. Relación con el RFIM
3. Reducción dimensional
4. El argumento de Imry-Ma
5. Grupo de renormalización
6. Replica Symmetry Breaking?
7. Algunos resultados numéricos
 - Orden de la transición y exponentes críticos
 - Dos o tres exponentes independientes?
 - Desorden binomial versus Gaussiano
 - Dinámica crítica o activada?
 - Universalidad en el AFDIM+H y en el RFIM
8. Conclusiones

Experimentos

- Material: $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$.
- En ausencia de campo magnético externo, el modelo pertenece a la misma clase de Universalidad que el modelo de Ising ferromagnético diluido. Gran acuerdo entre los exponentes medidos experimentalmente y los obtenidos mediante simulaciones numéricas.
- El calor específico (parte magnética) se mide mediante de la birrefringencia y posteriormente se sustrae el fondo de los fonones.
- La susceptibilidad staggered se mide mediante difracción de neutrones.
- En dos dimensiones no hay transición de fase.
- Para diluciones muy altas y/o altos campos magnéticos aparece una fase vidrio de spin.
- Transición de fase de segundo orden.
- Exponentes críticos: $\alpha \simeq 0$, $\nu = 0.93(3)$, $\gamma = 1.71(6)$ y $\bar{\gamma} = 3.0(1)$.
[$y = 0.85$, $\eta = 0.16$, $\bar{\eta} = 0.77$]
[El modelo $H = 0$ tiene los siguientes exponentes: $\nu = 0.6837$, $\alpha = -0.051$, $\eta = 0.0374$, $\beta = 0.355$ y $\gamma = 1.342$].

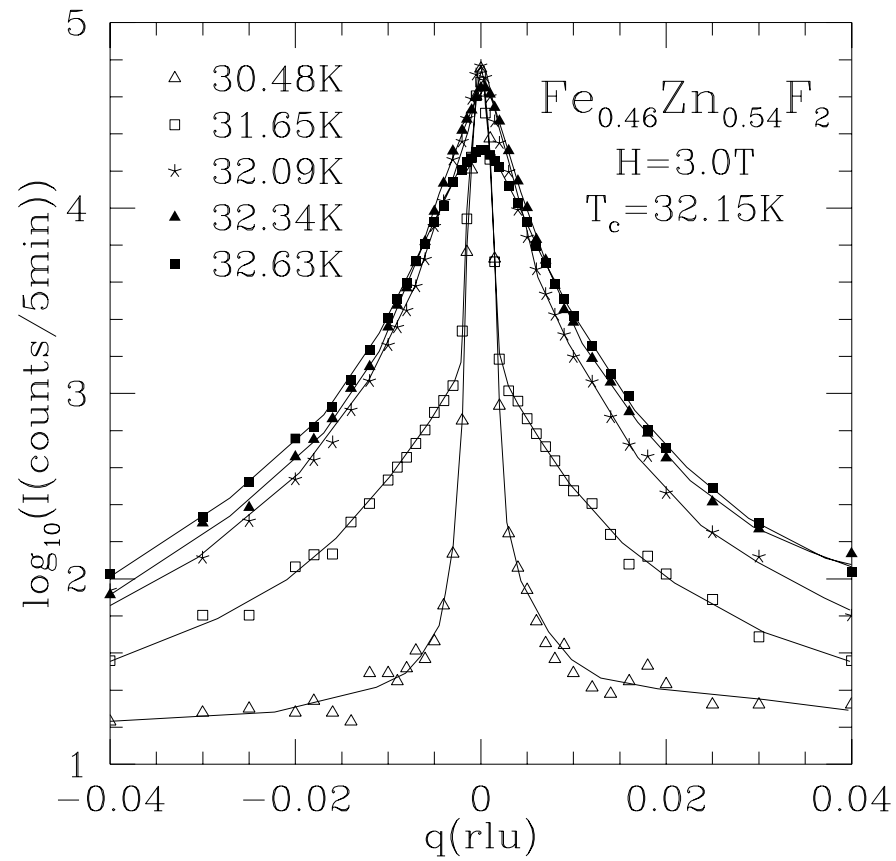


FIGURA 1: Factor de estructura (staggered) en 3 dimensiones (Belanger).

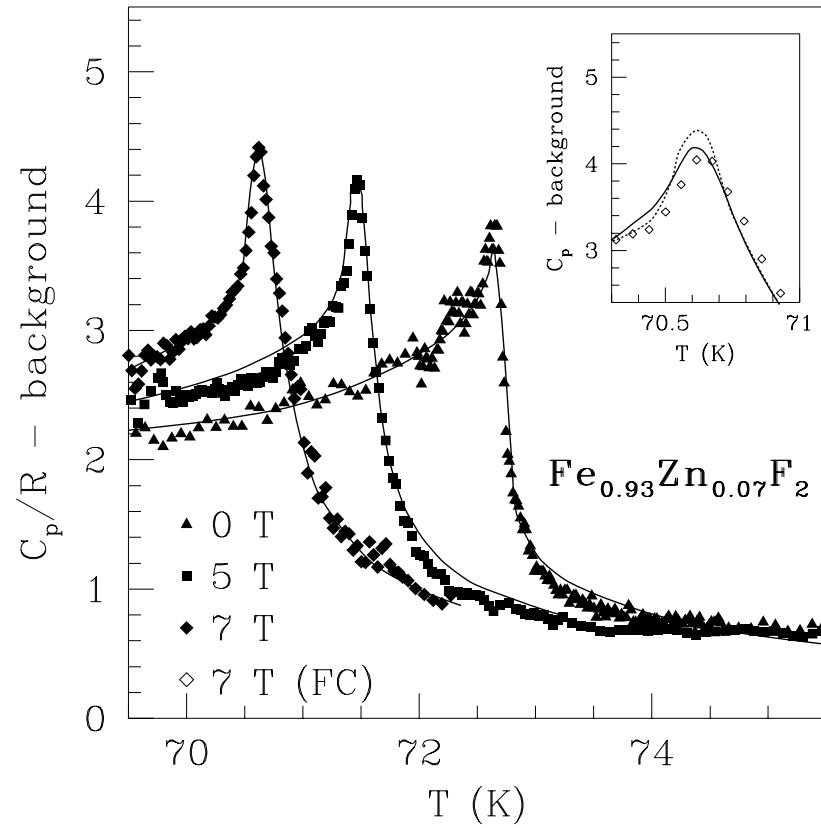


FIGURA 2: Calor específico (magnético) en tres dimensiones (Belanger).

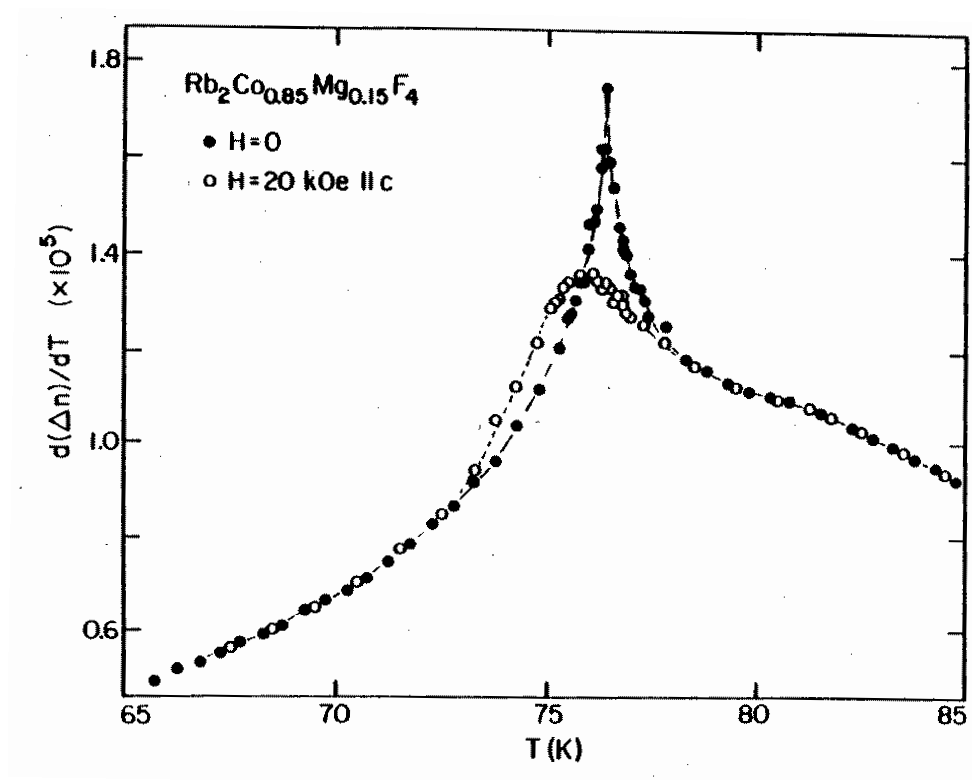


FIGURA 3: “Calor específico” en dos dimensiones (Belanger).

Relación con el RFIM

Argumento de Fishman y Aharony.

Consideremos una celda unidad en el antiferromagneto. Podemos definir la magnetización total $S_1 + S_2$ y la staggered $S_1 - S_2$, que es el parámetro de orden.

Diluyamos el sistema. En presencia de un campo magnético externo, este campo externo podrá acoplarse a S_1 (cuando falta S_2), a S_2 cuando falta S_1 o a ambos. Pero S_1 y S_2 los podemos expresar en términos de la magnetización total y la staggered, lo que induce un campo magnético aleatorio (unas veces estará S_1 o S_2 de manera aleatoria) acoplado al parámetro de orden (la magnetización staggered).

Cardy demostró la equivalencia de una manera más formal en el límite de campos externos pequeños.

Reducción dimensional

Considerando el campo magnético aleatorio como desorden “quenched” podemos escribir:

$$F[h] = \log \int d[\phi] \exp \left[- \int d^d x (\mathcal{L} + h(x)\phi) \right] ,$$
$$\overline{F} = \int d[h] F[h] \exp \left(- \frac{1}{2\Delta} \int d^d x h^2(x) \right) ,$$

donde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + g\phi^4 .$$

Usando el truco de las réplicas:

$$\log x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{n} ,$$

obtenemos el siguiente Hamiltoniano efectivo

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x \left\{ \sum_a \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_a^2 + g\phi_a^4 \right] - \frac{\Delta}{2} \sum_{a,b} \phi_a \phi_b \right\} .$$

Nota:

$$\int d[\phi_a] \exp(-\mathcal{H}_{\text{eff}}) \equiv \overline{Z}^n .$$

El propagador del caso libre ($g = 0$) es:

$$G_{ab}(p) = \frac{\delta_{ab}}{p^2 + m^2} + \frac{\Delta}{(p^2 + m^2)(p^2 + m^2 - n\Delta)} ,$$

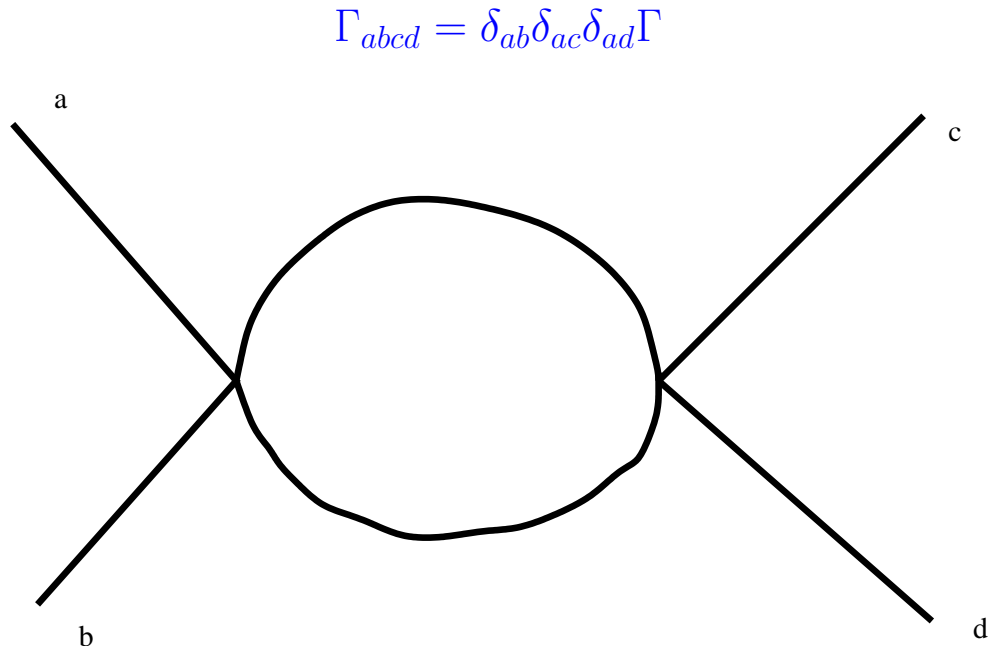


FIGURA 4: Función irreducible de cuatro puntos.

El diagrama es proporcional a

$$g^2 \delta_{ab} \delta_{cd} \int d^d p G_{ac}(p)^2$$

Necesitamos obtener δ_{ac} . Pero

$$G_{ac}^2 = \frac{\delta_{ac}}{p^4} - 2\Delta \frac{\delta_{ac}}{p^6} + \frac{\Delta^2}{p^8} \rightarrow -2\Delta \frac{\delta_{ac}}{p^6} .$$

Por lo tanto la **dimensión crítica superior** es **SEIS**.

Cerca de seis dimensiones podemos eliminar las fluctuaciones propias del campo ϕ y estudiar solo las que induce el campo magnético aleatorio $h(x)$.

Esto equivale a estudiar ϕ en la aproximación de campo medio. ϕ_h satisfará

$$-\nabla^2 \phi_h + V'(\phi_h) + h(x) = 0.$$

En esta aproximación tenemos

$$\overline{\langle \phi(x)\phi(0) \rangle} = \overline{\phi_h(x)\phi_h(0)}.$$

Además

$$\overline{\phi_h(x)\phi_h(0)} = \int d[h] [\phi] \exp\left(-\frac{1}{2\Delta} \int d^d x h^2(x)\right) |\det(-\nabla^2 + V''(\phi))| \delta(-\nabla^2 \phi + V'(\phi) + h) \phi(x)\phi(0).$$

Exponenciando la delta de Dirac:

$$\delta(-\nabla^2 \phi + V'(\phi) + h) = \int d[\alpha] \exp(-\alpha(-\nabla^2 \phi + V'(\phi) + h)).$$

Asumiremos que el determinante es positivo, y

$$\det(-\nabla^2 + V''(\phi)) = \int d[\psi] d[\bar{\psi}] \exp\left[-\int d^d x \bar{\psi} (-\nabla^2 + V'') \psi\right].$$

Es posible integrar el campo magnético (completando cuadrados) y

$$\overline{\langle \phi(x)\phi(0) \rangle} = \int d[\alpha] d[\phi] d[\psi] d[\bar{\psi}] \phi(x) \phi(0) \exp\left(-\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}}\right),$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{\psi} (-\nabla^2 + V''(\phi)) \psi + \alpha (-\nabla^2 \phi + V'(\phi)) - \frac{1}{2} \alpha^2 .$$

[Asumimos $\Delta = 1$].

Este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones que dejan invariante

$$x^2 + 4\bar{\theta}\theta ,$$

Por lo tanto todas las funciones de esta teoría son de la forma:

$$f(x, \bar{\theta}, \theta) = g(x^2 + 4\bar{\theta}\theta) .$$

Calculemos

$$\int d^d x d\bar{\theta} d\theta f(x^2 + 4\bar{\theta}\theta) = \int d^d x d\bar{\theta} d\theta (f(x^2) + 4\bar{\theta}\theta f'(x^2)) = -4 \int d^d x f'(x^2) = 4\pi \int d^{d-2} x f(x^2) .$$

Por lo tanto, un sistema d -dimensional con campo magnético aleatorio es equivalente a uno en $d - 2$ dimensiones sin campo!!

La **dimensión crítica inferior** sería **TRES**. (El modelo de Ising puro en una dimension no presenta transición).

Este resultado se puede obtener orden a orden en teoría de perturbaciones.

El argumento de Imry-Ma

Trabajemos a $T = 0$ y consideremos el estado fundamental ferromagnético $S_i = +1$. Sea un droplet, D , (región compacta de tamaño R con los espines invertidos respecto al estado fundamental).

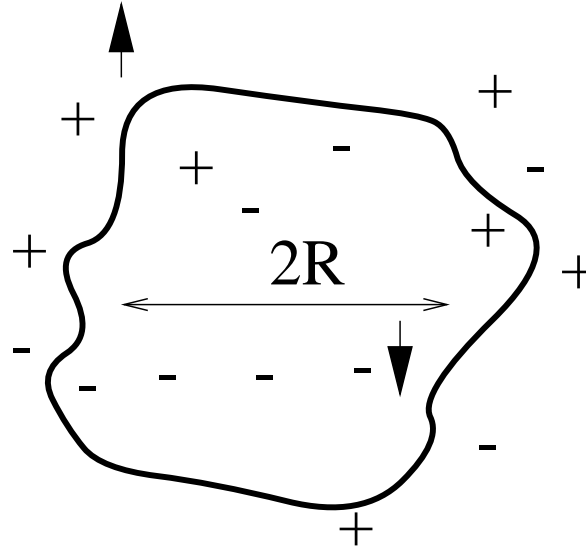


FIGURA 5: Un droplet bidimensional (Nattermann)

Crear un droplet aumenta la energía (se crea una interfase) en

$$+JR^{d-1},$$

pero también hay un cambio, ΔE_H , debido al campo magnético aleatorio, que puede ser positivo o negativo (!)

$$\Delta E_H = \sum_{i \in D} h_i.$$

ΔE_H tiene media cero pero desviación típica:

$$\delta \equiv \sqrt{\Delta E_H^2} = \pm (R^d h_R^2)^{1/2} .$$

Podemos elegir un punto del retículo donde $\delta < 0$.

El balance de ambas energías, propociona el siguiente resultado:

Si $d > 2$ el estado fundamental es estable (hay ferromagnetismo y por lo tanto TF a temperatura finita), mientras que para $d < 2$ el estado fundamental no es estable (no hay transición de fase).

$d = 2$ caso marginal. Binder demostró que la rugosidad de la interfase (no es plana) desestabiliza el estado ferromagnético. En dos dimensiones la rugosidad propociona una energía

$$-C \frac{h_R^2}{J} R \log R .$$

con $C > 0$. Por lo tanto en $d = 2$ el estado ferromagnético es inestable a $T = 0$.

Para futuro uso podemos definir un acoplamiento efectivo:

$$J(L) = JL - C \frac{h_R^2}{J} R \log R = JL (1 - Cw^2 \log L)$$

con $w \equiv h_R^2/J^2$.

Nótese que:

$$\frac{dJ(L)}{d \log L} = J(L) (1 - Cw^2) + O(w^4).$$

Este resultado ha sido demostrado rigurosamente por Aizenman y Wehr.

Grupo de renormalización

Seguimos trabajando a $T = 0$ y cerca de dos dimensiones ($2 + \epsilon$).

Bajo renormalización, tenemos ($t \equiv [h_R/J - (h_R/J)^*]$)

$$h' = b^x h ,$$

$$J' = b^y J ,$$

$$t' = b^z t .$$

La energía escala como:

$$\frac{1}{J} E_s(t, h/J) = b^{d-y} f(b^z t, b^{x-y} h/J) .$$

Derivando, es posible calcular la magnetización, susceptibilidad y el calor específico, por lo que tenemos las siguientes relaciones entre los exponentes críticos:

$$2 - \alpha = (d - y)\nu ,$$

$$\nu = 1/z ,$$

$$\beta = \nu(d - x) ,$$

$$\gamma = \frac{1}{\nu}(2x - y - d) ,$$

Se viola “hyperscaling”, pero se siguen satisfaciendo relaciones tipo

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 .$$

Podemos definir dos tipos de funciones de correlación y, por lo tanto, **dos dimensiones anómalas**:

$$G(r) = \overline{\langle S_0 S_r \rangle - \langle S_0 \rangle \langle S_r \rangle} = \frac{T}{r^{d-2+\eta}} g(r/\xi) ,$$

$$G_{\text{dis}}(r) = \overline{\langle S_0 \rangle \langle S_r \rangle} = \frac{T}{r^{d-4+\bar{\eta}}} f(r/\xi) ,$$

donde

$$\eta = d + 2 - 2x + y ,$$

$$\bar{\eta} = 4 + d - 2x .$$

Por lo tanto tenemos TRES exponentes críticos independientes, por ejemplo, ν , η e y .

Podemos escribir las ecuaciones del grupo de renormalización. Tomaremos la convención que $\epsilon \equiv d - 2$. Del scaling de J , h_R y h (un campo magnetico externo que tiene dimensiones R^d), podemos escribir las siguientes ecuaciones (deducción no rigurosa y heurística) ($l \equiv \log b$):

$$\frac{dh_R}{dl} = \frac{d}{2}h_R ,$$

$$\frac{dh}{dl} = dh ,$$

$$\frac{dJ}{dl} = J ((d - 1) - Cw^2) \equiv y(w)J ,$$

$C > 0$ depende del modelo (no universal). Como $w = h_R/J$, podemos obtener la siguiente ecuación de evolución para w :

$$\frac{dw}{dl} = \frac{1}{J} \left(\frac{dh_r + R}{dl} - w \frac{dJ}{dl} \right) = -\frac{\epsilon}{2}w + Cw^3 .$$

Por lo tanto si $\epsilon > 0$ (es decir $d > 2$), el GR tiene un punto fijo no trivial (random) $w^* = O(\epsilon)$, de acuerdo con el argumento de Imry-Ma.

Hay otro punto fijo a $T = 0$, el usual de Ising: $w = 0$, $h_R = h = 0$.

Hasta ahora hemos trabajado a $T = 0$, podemos estudiar el comportamiento del acoplamiento T/J . Si $T/J \ll 1$, $h/J \ll 1$, $h_R/J \ll 1$, entonces:

$$\left(\frac{T}{J} \right)' = b^{-y} \left(\frac{T}{J} \right)$$

y

$$\frac{d(T/J)}{dl} = -y(w) \left(\frac{T}{J} \right)$$

Con $y = 1 + \epsilon/2$ en el punto fijo “random”. Naturalmente $y = d - 1$ en el punto fijo de Ising a $T = 0$.

Además en el punto random:

$$x = 2 + \epsilon, \quad \frac{1}{\nu} = \epsilon.$$

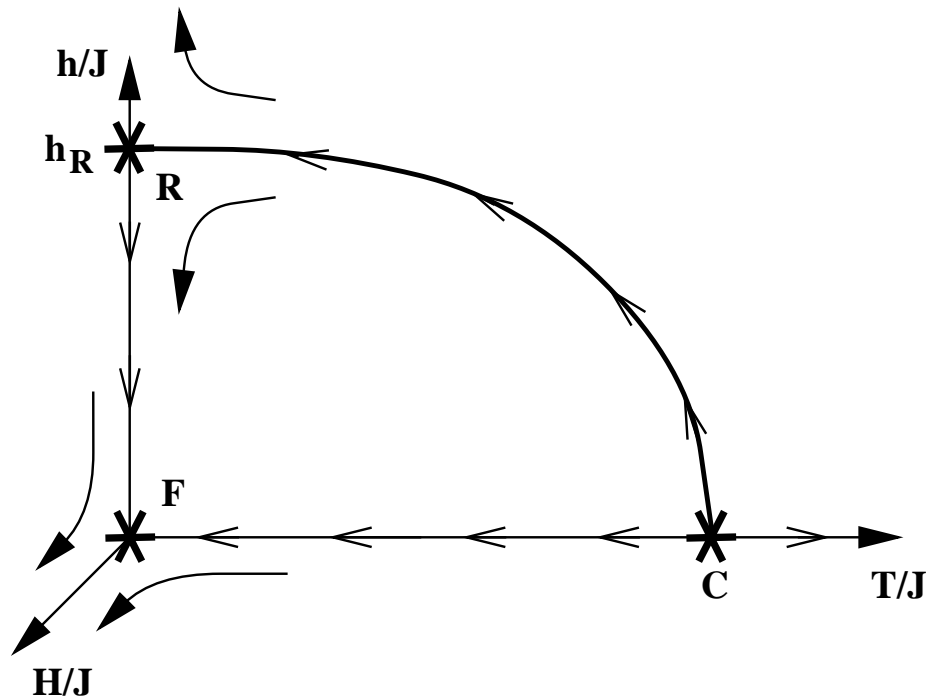


FIGURA 6: Flujo del grupo de renormalización en $d > 2$ (Nattermann).

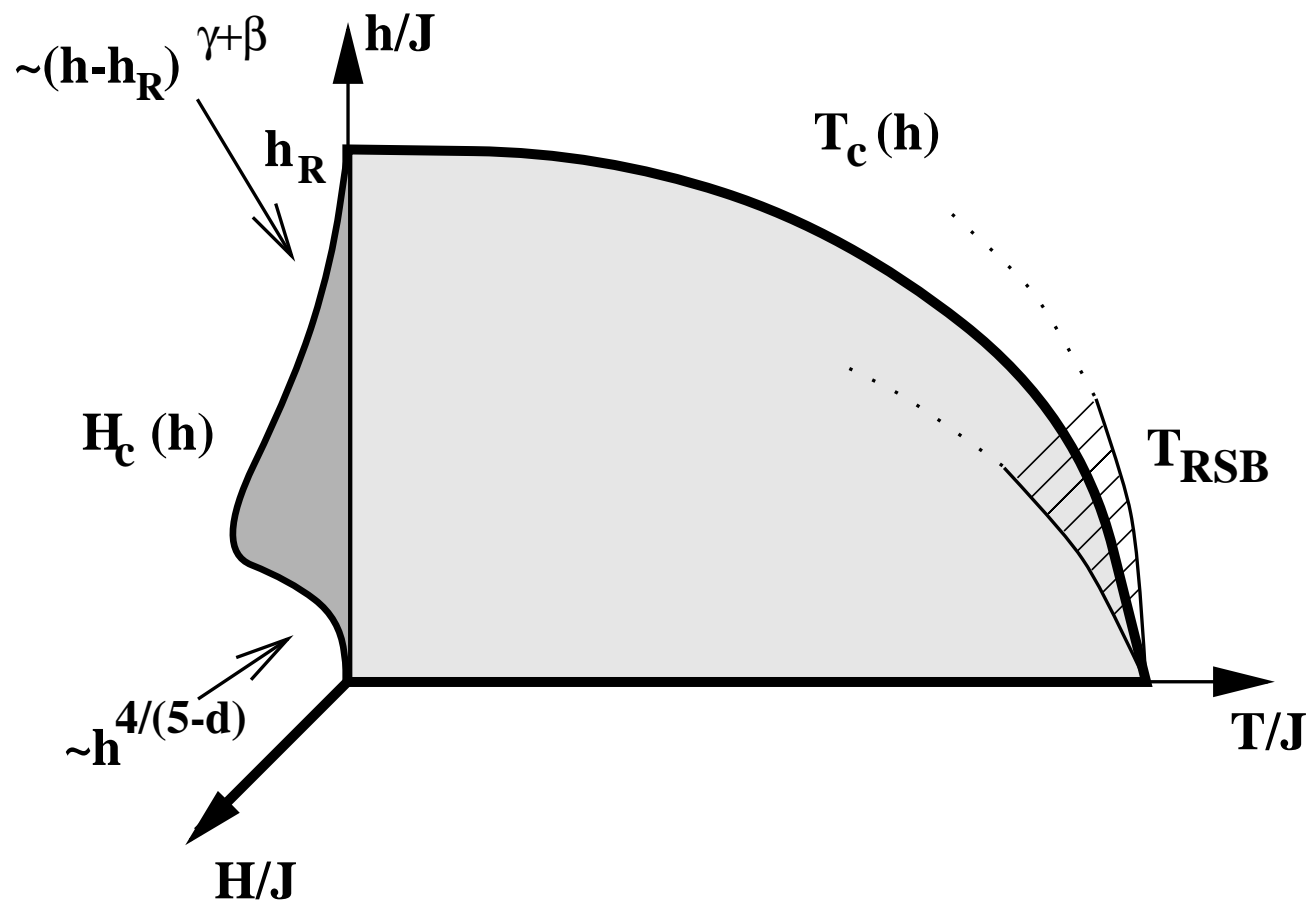


FIGURA 7: Diagrama de fases en $d > 2$ (Nattermann).

Orden de la transición de fase y exponentes críticos

La aproximación de campo medio predice segundo orden si el campo magnético es Gaussiano y primer orden si el campo magnético es bimodal.

Análisis basados en series de alta temperatura predicen segundo orden para ambas distribuciones.

Simulaciones numéricas para ambas distribuciones muestran que no hay calor latente ni coexistencia de fases (segundo orden), pero un salto en la magnetización (primer orden), que podría estar relacionado con una dependencia logarítmica en la temperatura reducida (segundo orden).

Referencia	y	$\nu = 1/z$	$\beta = \nu(d - x)$	$2\eta - \bar{\eta} = y - 2 + \eta$
MFA ¹	$d - 4$	$1/2$	$1/2$	$d - 6$
PT ² $d = 6 - \epsilon$	2	$\nu^{(0)}(d - 2)$	$\beta^{(0)}(d - 2)$	$\eta^{(0)}(d - 2)$
$d \rightarrow 2$	1	0	2	0
weighted MFA	1.51	1.25 ± 0.11		
MC ³ (d=3)				
Rieger and Young	1.56 ± 0.1	1.6 ± 0.3	0.003 ± 0.05	0.12 ± 0.12
Rieger	1.53 ± 0.1	1.1 ± 0.2	0.00 ± 0.05	-0.03 ± 0.15
HTSE ⁴ Gofman et al.	$(\gamma = 2.1 \pm 0.2)$			0
Realspace RNG				
Dayan et al.	1.56	1.39	≈ 0	0.12
Newmann et al.	1.00 ± 0.05	1.49 ± 0.008	1.66 ± 0.01	1.24
Cao and Machta	1.5	$\nu = 2.25$	0.02	0.02
Falicov et al.	1.4916 ± 0.0003	$\nu = 2.25 \pm 0.01$	0.0200 ± 0.0005	0.001 ± 0.001

TABLA 1: Exponentes críticos.

¹MFA: Campo medio

²PT: Teoria de perturbaciones

³MC: Monte Carlo

⁴HTSE: Series de alta temperatura

Dos o tres exponentes independientes?

Aharony, Imry y Ma sugirieron que

$$y = 2 - \eta .$$

Lo cuál implica que

$$2\eta = \bar{\eta} .$$

Lo que reduce el número total de exponentes a DOS.

Nota. Tenemos las siguientes desigualdades rigurosas:

$$y \geq \gamma/\nu = 2 - \eta , \quad y \leq d - 1 , \quad \gamma \geq 0 , \quad \beta \geq 0 .$$

El siguiente cociente ha sido estudiado en series de alta temperatura (15 términos):

$$A = \lim_{T \rightarrow T_c} \frac{T^2 G_{\text{dis}}(0)}{h^2 G^2(0)}$$

y se ha obtenido $A = 1 \pm 0.003$. Nótese que $G_{\text{dis}}(0)/G^2(0) \simeq \xi^{2\eta - \bar{\eta}}$.

En simulaciones numéricas, modelo Gaussiano, se obtuvo:

L	A^*	ΔA^*
4	1.19	0.22
6	1.14	0.23
8	1.10	0.33
10	1.12	0.29
12	1.00	0.26
16	0.80	0.27

TABLA 2: $A^*(L) = A(L, T^*(L))$ y su error asociado para diferentes tamaños del retículo (Rieger).

Campo magnético Binomial versus Gaussiano

	Gaussiana		Binaria	
η	0.50	± 0.05	0.56	± 0.03
$\bar{\eta}$	1.03	± 0.05	1.00	± 0.06
y	1.53	± 0.1	1.56	± 0.1
ν	1.1	± 0.2	1.6	± 0.3
γ	1.7	± 0.2	2.3	± 0.3
$\bar{\gamma}$	3.3	± 0.6	4.8	± 0.9
β	0.00	± 0.05	0.00	± 0.05
α	-0.5	± 0.2	-1.0	± 0.3

TABLA 3: Exponentes críticos para una distribución del campo magnético Gaussiana y otra binomial ambas a $h_R/T = 0.35$ (Rieger).

Conclusiones

1. Soluciones no perturbativas invalidan la teoría de perturbaciones y por lo tanto la reducción dimensional.
2. Las simulaciones numéricas apuntan a un escenario con dos exponentes críticos NO tres o bien a una transición de fase de primer orden. Escenario intermedio?
3. Simulaciones usando Fluctuación-Disipación fuera del equilibrio no encuentran traza de la fase RSB en el RFIM.
4. No hay estudios sistematicos de universalidad (i.e. no debe haber dependencia de los exponentes críticos con la varianza del campo magnético).
5. En el AFMD+H habría que estudiar también la Universalidad y si la dinámica es crítica (segundo orden) o activada (primer orden) en la transición de fase. Simulaciones numéricas previas dan segundo orden con una dinámica activada(?). Encuentran exponentes efectivos (dependen de la dilución).

Pure	FeF_2	Renormalización y Alta Temperatura
α	0.11 ± 0.005	0.1099 ± 0.0007 0.109 ± 0.004
β	0.325 ± 0.005	0.32648 ± 0.00018 0.3258 ± 0.0014
ν	0.64 ± 0.01	0.63002 ± 0.00023 0.6304 ± 0.0013
γ	1.25 ± 0.02	1.2371 ± 0.0004 1.2396 ± 0.0013
η	0.05	0.0364 ± 0.0004 0.0335 ± 0.0025
Random Exchange	$Fe_xZn_{1-x}F_2$ ($H = 0$)	Monte Carlo
α	-0.10 ± 0.02	-0.051 ± 0.013
β	0.350 ± 0.009	0.3546 ± 0.0028
ν	0.69 ± 0.01	0.6837 ± 0.0053
γ	1.31 ± 0.03	1.342 ± 0.010
η	0.10	0.0374 ± 0.0045
Random Field	$Fe_xZn_{1-x}F_2$ ($H > 0$)	Monte Carlo & Estado fundamental (exacto)
α	0.0 ± 0.02	-0.5 ± 0.2 -0.55 ± 0.2
β	no medido	0.00 ± 0.05 0.02 ± 0.01
ν	0.88 ± 0.05	1.1 ± 0.2 1.14 ± 0.10
γ	1.58 ± 0.13	1.7 ± 0.2 1.5 ± 0.2
η	0.20 ± 0.05	0.50 ± 0.05
$\bar{\gamma}$	$2\gamma = 3.16 \pm 0.26$	3.3 ± 0.6 3.4 ± 0.4
$\bar{\eta}$	$2\eta = 0.40 \pm 0.10$	1.03 ± 0.05