PROBLEMAS DE FÍSICA ESTADÍSTICA. Curso 2009/2010 **Hoja de Problemas 2**

1. Un sistema se compone de N partículas cuya interacción puede despreciarse, cada una de las cuales puede estar en uno de dos estados posibles, de energías respectivas ϵ_1 y ϵ_2 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$). (a) Sin realizar ningún cálculo explícito, haz una representación gráfica de la energía media $\langle E \rangle$ del sistema en función de la temperatura T. ¿Qué valores debe tomar $\langle E \rangle$ en los casos límite de temperaturas muy altas y de temperaturas muy bajas? Estima aproximadamente alrededor de qué temperatura varía $\langle E \rangle$ desde su valor límite a baja temperatura al correspondiente a alta temperatura. (b) Utilizando el resultado de (a), haz una representación cualitativa de la capacidad calorífica C_V en función de la temperatura. (c) Calcula explícitamente la energía media $\langle E \rangle$ y la capacidad calorífica C_V en función de T. Calcula la temperatura a la cual $\langle E \rangle$ toma el valor intermedio entre sus valores mínimo y máximo. Comprueba que los resultados obtenidos están de acuerdo con el análisis cualitativo de los apartados (a) y (b).

2. Considérese un sistema constituído por N partículas débilmente interactivas de espín 1/2 y momento magnético μ en el seno de un campo magnético $\mathcal{H}$. El sistema está en contacto con un foco térmico a la temperatura T. Calcula la energía media E en función de T y H. Compara con el resultado obtenido a partir de la colectividad microcanónica.

3. Un sólido que contiene átomos paramagnéticos de espín 1/2 se coloca a la temperatura T en un campo magnético exterior $\mathcal{H} = 3 \times 10^4$ gauss. Si el momento magnético de cada átomo es igual al magnetón de Bohr ($\mu_B = 0.927 \times 10^{-20}$ erg/gauss), ¿por debajo de qué temperatura hay que enfriar el sólido para que la probabilidad de que un espín se oriente paralelamente al campo sea mayor del 75 %?

4. Un oscilador armónico simple tiene unos niveles energéticos dados por $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Supongamos que este oscilador está en contacto térmico con un foco a la temperatura T. (a) Encuentra la razón entre la probabilidad de que el oscilador esté en el primer estado excitado y la de que esté en el estado fundamental. (b) ¿Qué condición debe verificar la temperatura para que pueda suponerse que únicamente el estado fundamental y el primer estado excitado están apreciablemente ocupados? Halla en ese caso la energía media del oscilador en función de la temperatura.

5. Consideremos un sistema físico constituído por una cadena unidimensional de N "partículas". Cada partícula puede encontrarse en dos estados posibles: estado A (con energía 0) o estado B (con energía $\epsilon > 0$). La cadena se halla en equilibrio a la temperatura T. (a) Suponiendo que las partículas son distinguibles, calcula la función de partición del sistema. Halla el número medio de partículas que se encuentran en el estado B, así como la energía media de la cadena. Calcula la función de partición de una sola partícula. ¿Es la cadena un sistema ideal? (b) Calcula el mismo tipo de magnitudes en el límite de $N \to \infty$, pero ahora suponiendo que cada partícula sólo puede hallarse en el estado B si la partícula anterior también lo está; es decir, la partícula j-ésima está en el estado B si y sólo si todas las partículas anteriores $(1, 2, \ldots, j-1)$ también lo están (efecto "cremallera"). ¿Es en este caso la cadena un sistema ideal?

6. Un objeto de masa M, sobre el que actúa la fuerza de la gravedad, está suspendido verticalmente de un muelle de constante k, de modo que la fuerza restauradora del muelle es $-kx$, siendo x la distancia que está separado el objeto de la posición de equilibrio del muelle. Todo el sistema está sumergido en un gas (por ejemplo, el aire de la habitación) que se encuentra en equilibrio a la temperatura T. Supondremos que la masa del muelle es despreciable y que el objeto sólo interacciona débilmente con el gas. (a) Calcula la elongación media $\langle x \rangle$ del muelle. (b) Calcula las fluctuaciones $\sigma^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. (c) Si queremos que $\sigma/|\langle x \rangle| < 0.01$, ¿cuál será la masa mínima M que podrá determinarse con este muelle?

7. Un gas ideal se encuentra en el seno de un campo gravitatorio uniforme en la dirección $-z$. Obtén la probabilidad $P(z)$ de que una partícula se encuentre entre z y $z + dz$.

8. Un gas monoatómico ideal en equilibrio a la temperatura T está contenido en una caja cúbica de arista L, cuyas caras superior e inferior son paralelas a la superficie de la Tierra. (a) ¿Cuál es la energía cinética media de una partícula? (b) ¿Cuál es la energía potencial gravitatoria media de una partícula? Haz una estimación del cociente entre estas dos energías medias tomando como ejemplo el argon a temperatura ambiente.

9. La resistividad eléctrica ρ de un metal a la temperatura ambiente es proporcional a la probabilidad de que un electrón sea dispersado por los átomos que vibran en la red, y esta probabilidad es a su vez proporcional a la

amplitud cuadrática media de vibración de estos átomos. Suponiendo que la estadística clásica es válida en esta zona de temperatura y que los átomos se comportan como osciladores armónicos unidimensionales, obtén la dependencia de ρ con la temperatura T.

10. Un sistema se compone de N partículas que interaccionan muy débilmente a una temperatura T suficientemente alta para que sea aplicable la mecánica estadística clásica. Cada partícula tiene una masa m y está libre para realizar oscilaciones unidimensionales alrededor de su posición de equilibrio. Calcula la capacidad calorífica si (a) la fuerza efectiva para volver a llevar a cada partícula a su posición de equilibrio es proporcional a su desplazamiento x, (b) la fuerza recuperadora es proporcional a x^3.

11. Supongamos que el hamiltoniano de un sistema ideal de N partículas contenidas en un volumen V es

$$H = a \sum_{i=1}^{N} |\vec{p_i}|^{\ell} , \quad a, \ell > 0 .$$

Calcula la energía media y la presión del gas a la temperatura T.

12. Supongamos un gas ideal monoatómico clásico constituído por N partículas encerradas en un volumen V, en equilibrio a la temperatura T. Consideremos una pequeña región del gas definida por un volumen $V' \ll V$. Utilizando la colectividad gran canónica, ¿cuál es la probabilidad $\omega(N')$ de que en el volumen V' haya N' partículas? Calcula el valor medio y la varianza de N'.

13. Las partículas de un cierto gas ideal pueden depositarse (adsorberse) sobre una superficie de área A, constituyendo las partículas adsorbidas un gas ideal bidimensional en el que cada partícula tiene una energía potencial $-\epsilon_0$. Podemos suponer que el resto del gas no adsorbido constituye respecto del adsorbido un foco térmico y de partículas de densidad numérica $n = N/V$. Si el sistema está en equilibrio a la temperatura T, calcula el valor medio y la varianza del número de partículas N' adsorbidas sobre la superficie.