1. Consideremos un conjunto de osciladores armónicos clásicos unidimensionales. Suponiendo que en la expresión del desplazamiento $x = A\cos(\omega t + \phi)$ de un oscilador, ϕ toma cualquier valor entre 0 y 2π con igual probabilidad, calcúlese la probabilidad $P(x)dx$ de que el desplazamiento de un oscilador en un instante dado esté comprendido entre x y $x + dx$: (a) a partir de la distribución de probabilidades de ϕ, (b) como cociente entre el volumen del espacio fásico que está en el intervalo de energía entre E y $E + \Delta E$ y en el intervalo entre x y $x + dx$ y el volumen total de espacio fásico que está en ese intervalo de energía.

2. El objeto de este problema es demostrar el teorema de equipartición generalizado en el colectivo microcanónico:

$$\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = k_B T \delta_{ij}, \quad x_i = q_i \ , p_i.$$

(a) Para ello, demuéstrese primero que

$$\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{1}{h_0^f \Omega(E)} \frac{\partial}{\partial E} \mathcal{F}(E) \ ,$$

siendo

$$\mathcal{F}(E) = \int_0^E dE' \int dq \ dp \ x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \delta\left(E' - H(q,p)\right) \ .$$

(b) A continuación, pruébense las siguientes igualdades:

$$\mathcal{F}(E) = \int_{H<E} dq \ dp \ x_i \frac{\partial}{\partial x_j}(H - E) = \int_{H<E} dq \ dp \ (E - H)\delta_{ij} = \int_0^E dE' \int dq \ dp \ (E - H)\delta(E' - H)\delta_{ij}.$$

(c) Por último, utilizando la última ecuación en (b), pruébese finalmente el teorema de equipartición.

3. Consideremos un sistema aislado formado por un gran número N de partículas (distinguibles) de espín $1/2$ muy débilmente interactivas. Cada partícula posee un momento magnético μ que puede orientarse paralela o antiparalelamente al campo aplicado $\mathcal{H}$. La energía del sistema es $E = -(N_1 - N_2)\mu\mathcal{H}$, siendo N_1 el número de espines alineados paralelamente a $\mathcal{H}$ y N_2 el de antiparalelos. (a) Calcúlese el número de estados $\Omega(E)\Delta E$ que existen en el intervalo de energía entre E y $E + \Delta E$, siendo $\Delta E \ll E$ pero $\Delta E \gg \mu\mathcal{H}$ (puede aplicarse la fórmula de Stirling para obtener una expresión sencilla de $\Omega(E)$). (b) Si el sistema está en equilibrio, obténgase la relación entre la temperatura absoluta T y la energía E. ¿Bajo qué circunstancias es T negativa? (c) Exprésese el momento magnético total $M = \mu(N_1 - N_2)$ en función de $\mathcal{H}$ y T.

4. Consideremos dos sistemas A_1 y A_2 situados en un campo magnético $\mathcal{H}$. El sistema A_i $(i = 1, 2)$ está formado por N_i partículas localizadas débilmente interactivas de espín $1/2$ y momento magnético μ_i, encontrándose inicialmente aislado con una energía total $b_i N_i \mu_i \mathcal{H}$, siendo $|b_i| \ll 1$. Se ponen entonces en contacto térmico mutuo. En la situación de equilibrio térmico final, (a) ¿cuál es el valor más probable de la energía del sistema A_1? (b) ¿Qué calor ha absorbido el sistema A_1 al pasar de la situación inicial a la final? (c) ¿En qué factor ha variado la temperatura del sistema A_1?

5. Un sistema formado por N partículas distinguibles se encuentra aislado en equilibrio con una energía E. Cada partícula puede únicamente encontrarse en dos posibles estados de energía, uno de valor 0 y otro de valor $\epsilon > 0$. (a) Calcúlese el número de estados accesibles al sistema $\Omega(E)$ y la entropía del mismo. (b) Determínese el valor de la energía para el que la entropía se hace máxima. (c) Obténgase la relación entre la energía del sistema y su temperatura.

6. Un sistema está formado por N_1 moléculas del tipo 1 y N_2 moléculas del tipo 2, encerradas dentro de una caja de volumen V. Se supone que las moléculas tienen interacciones mutuas muy débiles, de forma que constituyen una mezcla de gas ideal. (a) Calcúlese la función $\Gamma(E, V, N_1, N_2)$. (b) Obténgase la temperatura, la presión y los potenciales químicos.

7. Considérese un sistema formado por N partículas indistinguibles que pueden ocupar los nodos de dos redes A_1 y A_2. Cada una de estas redes tiene N nodos. La energía de una partícula es ϵ_1 cuando ocupa un nodo de la red A_1 y ϵ_2 cuando el nodo pertenece a la red A_2. Calcular la temperatura como función de la energía del sistema.

8. Usando la colectividad microcanónica calcular la ecuación de estado, energía como función de la temperatura, calor específico y potencial químico para un gas ideal de partículas ultra-relativistas ($E = pc$) tridimensional.

   Ayuda:

$$I_n \equiv \int_{\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1} d^n x = \frac{2^n}{n!} \ .$$

   Usar la aproximación:

$$E = c(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2} \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \left(|p_x| + |p_y| + |p_z| \right) \ .$$