FÍSICA ESTADÍSTICA.
Examen Final. 23 de Junio de 2005.

---

1. Supongamos que la energía de una partícula pueda ser representada mediante la expresión $E(z) = az^2$, donde z puede ser una coordenada o un momento con $z \in (-\infty, \infty)$.

- Calcular la energía media por partícula en la colectividad canónica.
- Expresar el principio de equipartición. Aplicar el citado principio para calcular la energía media por partícula; comprar con el valor obtenido en el apartado anterior.

(2.5 puntos)

---

2. En la colectividad microcanónica calcular el potencial químico de un gas ideal bidimensional y no relativista (confinado en una superficie S) como función de la densidad de partículas, energía por partícula y temperatura. Calcúlese también la temperatura como función de la energía.

Ayuda: El volumen de una hiperesfera de radio R en L dimensiones es:

$$V_L(R) = \frac{\pi^{L/2}}{\Gamma(\frac{L}{2}+1)} R^L \, .$$

(2.5 puntos)

---

3. Considérese un gas cuántico ideal (fermiones) en equilibrio a una temperatura T. Cada fermión puede encontrarse en dos niveles de energía (γ y δ), con energías E_γ y E_δ respectivamente.

1. Calcular la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado cuántico $\mathcal{R}$ tal que n_γ fermiones se encuentren en el nivel γ y n_δ fermiones se encuentren en el nivel δ. ¿Qué valores numéricos pueden tomar las variables n_γ y n_δ?
2. A partir de la probabilidad $P_\mathcal{R}$ calculada en el apartado anterior, calcular la probabilidad p_δ de que n_δ fermiones se encuentren en el nivel δ, independientemente de lo que ocurra en el nivel γ.
3. Usando p_δ, calcular el número medio de fermiones que ocupan el estado δ ($\langle n_\delta \rangle$), así como la energía media del sistema. ¿Coincide el valor obtenido para $\langle n_\delta \rangle$ con el obtenido en la estadística de Fermi-Dirac?

(2.5 puntos)

---

4. Consideremos un gas de Bose-Einstein tridimensional, degenerado y ultrarrelativista ($E = pc$). Calcular la temperatura de la condensación de Bose-Einstein, T_C. Calcular también la energía media en función de la temperatura en la región $T < T_C$.

Ayuda:

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} = \Gamma(n)\zeta(n) \, , \quad n > 1.$$

(2.5 puntos)
