Mónica Capilla Alba
Jesús M. Gómez Romero
Hoja 4
Física Estadística
09/10

**EJERCICIO 3**

Un gas de N bosones se encuentra encerrado en un volumen $V = L^d$, en un universo de *d* dimensiones. Teniendo en cuenta que los niveles energéticos de traslación de una partícula en una caja de arista L son:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\, m\, L^2} \left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_d^2\right)$$

con $n_i^2 = 1, 2, \ldots$ , prueba que

a) La densidad de estados $\rho(\varepsilon)$ es proporcional a $V\, \varepsilon^{(d-2)/2}$ en el límite de volúmenes grandes.

b) La temperatura de condensación $T_0$ depende de la densidad $N/V$ como $(N/V)^{2/d}$.

c) Asimismo determina a qué potencia de la temperatura es proporcional la energía media por unidad de volumen $\langle E\rangle/V$ si $T < T_0$ .

En los todos los apartados lo que queremos comprobar es la dependencia de unas magnitudes con respecto a otras, de modo que lo que nos interesa ver es la relación proporcional que guardan entre ellas, no siendo relevante las constantes que vayan surgiendo en el análisis del gas de bosones, simplificando de esta forma el proceso.

a) El límite de volúmenes grandes nos indica que se desprecia la influencia de las paredes del recinto que contiene al gas y que al ser la longitud de la arista L grande, los valores posibles de la energía estarán muy próximos entre sí, pudiendo realizar de este modo los cálculos correspondientes con integrales.

La densidad de estados nos indica cuántos estados estacionarios pueden encontrarse con una energía comprendida entre $\varepsilon$ y $\varepsilon + d\varepsilon$.

Podemos expresar los niveles energéticos como:

$$\varepsilon \propto \frac{n^2}{L^2}$$

donde $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_d^2$ debido al teorema de Pitágoras trasladado a *d* dimensiones.

Si diferenciamos la ecuación anterior, obtenemos:

$$d\varepsilon \ \propto \ \frac{n}{L^2}\, dn$$

o también:

$$\frac{dn}{d\varepsilon} \ \propto \ \frac{L^2}{n}$$

que utilizaremos más adelante.

Sabiendo que, podemos escribir la densidad de estados en función de *n*:

$$\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon \ = \ \rho(n)\, dn$$

donde $\rho(n)\, dn$ representa las posibles combinaciones de los cuadrados de los números cuánticos $n_1, n_2, \dots, n_d$ que sean posibles para obtener un determinado valor de *n* que se encuentre entre *n* y *n + dn*.

Lo que nos interesa calcular es el volumen (en *d* dimensiones) comprendido entre una hiperesfera de radio *n* y otra de radio *n + dn* , que nos será útil escribiéndolo en función del área (nos referimos a su análoga en *d* dimensiones):

$$\rho(n)\, dn \ \propto \ n^{d-1}\, dn$$

es decir, que es proporcional a la potencia *d-1* del radio de la hiperesfera.

Luego, sustituyendo esta expresión en la anterior, obtenemos:

$$\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon \ \propto \ n^{d-1}\, dn$$

y en función de las expresiones que ya hemos calculado, podemos reescribirla como:

$$\rho(\varepsilon) \ \propto \ n^{d-1}\, \frac{dn}{d\varepsilon} \ = \ n^{d-1}\, \frac{L^2}{n} \ = \ L^2\ n^{d-2}$$

Ahora sólo bastará aplicar la relación proporcional que guarda *n* con $\varepsilon$ :

$$\rho(\varepsilon) \ \propto \ L^2 \left(L\, \varepsilon^{1/2}\right)^{d-2}$$

operando queda:

$$\rho(\varepsilon) \ \propto \ L^d\ \varepsilon^{(d-2)/2}$$

Y finalmente sabiendo, tal y como nos dice el enunciado, que $V = L^d$, llegamos a la expresión buscada:

$$\rho(\varepsilon) \ \propto \ V\ \varepsilon^{(d-2)/2}$$

cqd

b) Sabemos que para el caso de bosones, el número medio de partículas en un estado cuántico es:

$$\langle n(\varepsilon)\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B\, T}$ , siendo $k_B$ la cte de Boltzmann y T la temperatura.

Podemos escribir el número de partículas como:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, \rho(\varepsilon)\, \langle n(\epsilon)\rangle$$

De modo que sustituyendo en esta expresión el resultado del apartado anterior y el número medio de partículas, se obtiene:

$$N \propto V \int_0^\infty d\varepsilon\ \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Para obtener la temperatura de condensación $T_0$, se estudia el caso en el que el potencial químico es nulo, entonces la expresión anterior queda:

$$\frac{N}{V} \propto \int_0^\infty d\varepsilon\ \frac{\varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta_0 \varepsilon} - 1}$$

siendo $\beta_0 = \frac{1}{k_B\, T_0}$.

Hacemos el cambio de variable: $x = \beta_0\, \varepsilon \quad \rightarrow \quad dx = \beta_0\, d\varepsilon$

$$\frac{N}{V} \propto \int_0^\infty \frac{dx}{\beta_0}\ \frac{\left(\frac{x}{\beta_0}\right)^{(d-2)/2}}{e^x - 1} = \left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{d/2} \int_0^\infty dx\ \frac{x^{\left(\frac{d}{2}-1\right)}}{e^x - 1}$$

La integral es del tipo:

$$\int_0^\infty dx\ \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \Gamma(s)\, \xi(s)$$

Es decir, es una constante, de modo que no es necesario calcular su valor numérico, no obstante indicamos que en nuestro caso sería para $s = \frac{d}{2}$, luego:

$$\int_0^\infty dx\ \frac{x^{\left(\frac{d}{2}-1\right)}}{e^x - 1} = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\, \xi\left(\frac{d}{2}\right)$$

Entonces la relación entre $\beta_0$ y la densidad nos queda:

$$\left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{d/2} \propto \frac{N}{V} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\beta_0} \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/d}$$

y para ver la relación con la temperatura de condensación, no tenemos más que sustituir $\beta_0$ por su expresión sin tener en cuenta la $k_B$ ya que es una constante:

$$T_0 \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/d}$$

cqd

c) Si $T < T_0$ , $\mu \cong 0$ .

La energía media viene dada por:

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon\, \rho(\varepsilon) \, \langle n(\epsilon) \rangle \; \varepsilon$$

realizaremos un cálculo análogo al del apartado anterior:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} \propto \int_0^\infty d\varepsilon \; \frac{\varepsilon \; \varepsilon^{(d-2)/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \int_0^\infty d\varepsilon \; \frac{\varepsilon^{d/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Hacemos el cambio de variable: $y = \beta\, \varepsilon \;\; \rightarrow \;\; dy = \beta\, d\varepsilon$

$$\frac{\langle E \rangle}{V} \propto \int_0^\infty \frac{dy}{\beta} \, \frac{\left(\frac{y}{\beta}\right)^{d/2}}{e^y - 1} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{(d+2)/2} \int_0^\infty dy \; \frac{y^{\left(\frac{d+2}{2}-1\right)}}{e^y - 1}$$

De modo que de nuevo obtenemos una integral que es una constante y que no influye en la proporcionalidad que queremos hallar, entonces nos queda:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} \propto \left(\frac{1}{\beta}\right)^{(d+2)/2}$$

Y, por último, expresándolo en función de la temperatura, obtenemos:

$$\frac{\langle E \rangle}{V} \propto T^{(d+2)/2}$$

es decir la potencia de la temperatura a la cual es proporcional la energía media por unidad de volumen es $\frac{d+2}{2}$.