Física Estadística

El Gas de Fermi Degenerado

María F. Collado Caballero
Isabel Mª Martín Ríos

Hoja 4 - Problema 2º

La aproximación lineal de la distribución de Fermi consiste en sustituir la verdadera distribución $n(\varepsilon)$ por tres tramos lineales tales que $n(\varepsilon)=1$ si $0\leq\varepsilon\leq\mu-a$ y $n(\varepsilon)=-\left(\dfrac{1}{(a+b)}\right)\left[\varepsilon-(\mu+b)\right]$ si $\mu-a\leq\varepsilon\leq\mu+b$, siendo 0 en cualquier otro caso. Los valores de a y de b se determinan de forma que la distribución aproximada reproduzca correctamente los valores exactos de $n(\varepsilon)$ y su derivada en $\varepsilon=\mu$.

(a) Determina a y b. ¿es exacta la aproximación lineal en el cero absoluto?

(b) La densidad de estados en un gas de Fermi tridimensional es $\mathcal{N}(\varepsilon)=AV\varepsilon^{1/2}$, siendo A una constante. Obtén la energía de Fermi μ_0. ¿Qué significado físico tiene la temperatura de Fermi T_F?

(c) Utiliza la aproximación lineal para hallar la expresión que relaciona el nivel de Fermi μ con la temperatura T y la densidad N/V.

La aproximación lineal tiene por tanto la siguiente forma:

$$n_{aprox}(\varepsilon)=\begin{cases} 1 & 0\leq\varepsilon\leq\mu-a \\ -\left(\dfrac{1}{a+b}\right)\left[\varepsilon-(\mu+b)\right] & \mu-a\leq\varepsilon\leq\mu+b \\ 0 & \varepsilon\geq\mu+b \end{cases} \tag{1}$$

Por otra parte tenemos la verdadera distribución que tiene la forma siguiente:

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{2}$$

a) Para determinar a y b impondremos la condición de $\varepsilon=\mu$ en las ecuaciones (1) y (2) y en sus respectivas derivadas, con lo cual obtendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{De la ecuación } (1) \text{ tenemos}: & \dfrac{b}{a+b} \\ \text{De la ecuación } (2) \text{ tenemos}: & \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow a+b = 2b$$

Ahora derivamos (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r}\left.\dfrac{dn_{aprox}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} = -\left(\dfrac{1}{a+b}\right) \\ \left.\dfrac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} = -\dfrac{\beta}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{\beta}{4} \Rightarrow a+b = \frac{4}{\beta}$$

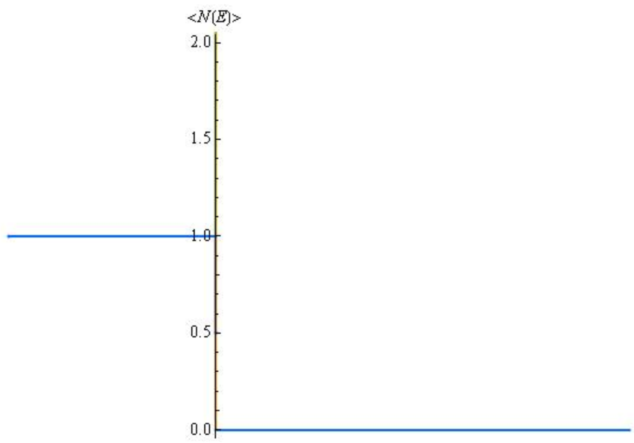
Nos queda por tanto el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b = 2b \\ a+b = \dfrac{4}{\beta}\end{array}\right\}$$

Por lo que los valores de a y b son:

$$\boxed{a = b = \frac{2}{\beta}}$$

Para bajas temperaturas, la distribución de fermi es una función escalón que vale 1 si ε < μ y 0 si ε > μ. Esto quiere decir que las partículas van colocando desde el nivel más bajo de energía hacia arriba debido al Principio de exclusión de Pauli hasta que se hayan puesto todas las partículas. La energía del último nivel ocupado se denomina energía de Fermi y la temperatura a la que corresponde esta energía mediante $\varepsilon = k_B T$ temperatura de Fermi.



La aproximación de decir que la distribución de Fermi-Dirac sigue siendo un escalón hasta temperatura ambiente es válida con bastante precisión.

Ahora comprobaremos que efectivamente la aproximación también se hace una función escalón para temperaturas bajas, para ello sustituiremos los valores obtenidos de a y b, y comprobaremos el resultado para el límite $T \to 0$.

$$n_{aprox}(\varepsilon)=\begin{cases} 1 & 0\le\varepsilon\le\mu-\dfrac{2}{\beta} \\ -\left(\dfrac{\beta}{4}\right)\left[\varepsilon-(\mu+\dfrac{2}{\beta})\right] & \mu-\dfrac{2}{\beta}\le\varepsilon\le\mu+\dfrac{2}{\beta} \\ 0 & \varepsilon\ge\mu+\dfrac{2}{\beta} \end{cases}$$

Como ya sabemos, $\beta=\dfrac{1}{k_B T}$, entonces cuando $T\to 0$, la aproximación toma la forma de un potencial escalón.

b) Para calcular la energía de Fermi μ_0 vamos a emplear la densidad de estados , cuya expresión viene dada por:

$$\mathcal{N}(\varepsilon)=AV\varepsilon^{1/2}$$

Esta expresión está relacionada con el número de partículas mediante la siguiente integral:

$$N=\int_0^\infty d\varepsilon\mathcal{N}(\varepsilon)\langle n(\varepsilon)\rangle$$

Como hemos visto en el apartado a), cuando $T\to 0$, la distribución de Fermi, $\langle n(\varepsilon)\rangle$, se hace una función escalón, con lo que los límites de la integral estarán entre 0 y μ_0, y por tanto la integral nos queda de la siguiente forma:

$$N=\int_0^{\mu_0} d\varepsilon\mathcal{N}(\varepsilon)=\int_0^{\mu_0} d\varepsilon AV\varepsilon^{1/2}=AV\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\mu_0}=\frac{2}{3}AV\mu_0^{3/2}$$

Si lo escribimos en función del número de partículas por unidad de volumen tenemos:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{2}{3}A\mu_0^{3/2}$$

Despejando μ_0 tenemos:

$$\boxed{\mu_0=\left(\frac{3}{2}\frac{n}{A}\right)^{2/3}}$$

Como podemos comprobar, $\mu_0\propto n^{2/3}$, correspondiente a los fermiones no relativistas.

Temperatura de Fermi

Al cociente μ_0/k, que tiene dimensiones de temperatura, se le suele denominar temperatura de Fermi T_F.

Sus valores típicos son del orden de 10^5 K, como puede comprobarse sin más que recordar el valor de la constante de Boltzmann $k = 1{,}38 * 10^{-16}$ erg/K.

La temperatura de Fermi tiene una interpretación física, como podemos estimar que la energía media por electrón en el cero absoluto es

$$\frac{\langle E\rangle}{N} = \frac{3}{5}\mu_0$$

si ahora tenemos en cuenta el teorema de equipartición de la energía para un gas ideal viene dado por:

$$\frac{\langle E\rangle}{N} = \frac{3}{2}k_B T$$

Resulta que para tuviera la misma energía que tiene un gas de Fermi en el cero absoluto, habría de encontrarse a una temperatura:

$$T = \frac{2}{5}\frac{\mu_0}{k_B} = \frac{2}{5}T_F$$

c) Para calcular la expresión que relaciona el nivel de Fermi con la temperatura y la densidad mediante la aproximación lineal, procederemos la misma forma que en el apartado b), aunque en este caso al tener tres intervalos, tendremos también tres integrales.

Tenemos:

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = AV\varepsilon^{1/2}$$

$$n_{aprox}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & 0 \le \varepsilon \le \mu - \dfrac{2}{\beta} \\ -\left(\dfrac{\beta}{4}\right)\left[\varepsilon - (\mu + \dfrac{2}{\beta})\right] & \mu - \dfrac{2}{\beta} \le \varepsilon \le \mu + \dfrac{2}{\beta} \\ 0 & \varepsilon \ge \mu + \dfrac{2}{\beta} \end{cases}$$

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon)\langle n(\varepsilon)\rangle$$

Sustituyendo:

$$N = AV\int_0^\infty \varepsilon^{1/2}\langle n(\varepsilon)\rangle d\varepsilon = AV\left[\int_0^{\mu-\frac{2}{\beta}} \varepsilon^{1/2}d\varepsilon + \int_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} -\frac{\beta}{4}\left(\varepsilon - \mu - \frac{2}{\beta}\right)\varepsilon^{1/2}d\varepsilon + \int_{\mu+\frac{2}{\beta}}^{\infty} 0\cdot\varepsilon^{1/2}d\varepsilon\right]$$

Vamos a hacer cada una de las integrales por separado.

1ª) $\displaystyle\int_0^{\mu-\frac{2}{\beta}} \varepsilon^{1/2}d\varepsilon = \left.\frac{\varepsilon^{3/2}}{3/2}\right|_0^{\mu-\frac{2}{\beta}} = \frac{2}{3}\left(\mu - \frac{2}{\beta}\right)^{3/2}$

Podemos descomponer la segunda integral en tres integrales, de la siguiente forma:

$$\int_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} \frac{\beta}{4}\left(\varepsilon-\mu-\frac{2}{\beta}\right)\varepsilon^{1/2}d\varepsilon = -\int_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} \frac{\beta}{4}\varepsilon\varepsilon^{1/2}d\varepsilon + \int_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} \frac{\beta}{4}\mu\varepsilon^{1/2}d\varepsilon + \int_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} \frac{\cancel{\beta}}{4}\frac{2}{\cancel{\beta}}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon =$$

2ª)

$$= -\frac{\beta}{4}\frac{2}{5}\varepsilon^{5/2}\Bigg|_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} + \frac{\beta}{4}\frac{2}{3}\mu\varepsilon^{3/2}\Bigg|_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\Bigg|_{\mu-\frac{2}{\beta}}^{\mu+\frac{2}{\beta}}$$

3ª) Es cero.

Operando, llegamos al resultado final:

$$\frac{N}{V} = \frac{A}{15}\left[\left(\mu-\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}(2-\mu\beta) + \left(\mu+\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}(2+\mu\beta)\right] =$$

$$= A\frac{\beta}{15}\left[\left(\mu-\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{\beta}-\mu\right) + \left(\mu+\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{\beta}+\mu\right)\right] =$$

$$= A\frac{\beta}{15}\left[-\left(\mu-\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}\left(\mu-\frac{2}{\beta}\right) + \left(\mu+\frac{2}{\beta}\right)^{3/2}\left(\mu+\frac{2}{\beta}\right)\right] =$$

$$= A\frac{\beta}{15}\left[\left(\mu+\frac{2}{\beta}\right)^{5/2} - \left(\mu-\frac{2}{\beta}\right)^{5/2}\right]$$

Para expresarlo en función de la temperatura, mediante: $\beta = \frac{1}{k_B T}$

$$\boxed{\frac{N}{V} = \frac{A}{15}\frac{1}{k_B T}\left[\left(\mu+2k_B T\right)^{5/2} - \left(\mu-2k_B T\right)^{5/2}\right]}$$