

**Ejercicio 3.**

Un sistema está constituido por partículas de spin  $3/2$  débilmente interactuantes. La densidad del sistema es de  $10^{27}$  partículas/m<sup>3</sup>, y la temperatura es tal que la cantidad de movimiento de una partícula típica es del orden de  $10^{-22}$  kgm/s. ¿Es absolutamente necesario describir el sistema mediante una de las estadísticas cuánticas? ¿Cuál? Si las partículas tuvieran spin 1 y se hallaran a la misma densidad y temperatura ¿aumentaría o disminuiría la presión? ¿Y la capacidad calorífica a volumen constante? ¿Y la entropía?

En primer lugar notemos que al tratar con partículas de spin semientero nos referimos a fermiones, mientras que para spin entero serán bosones.

Como el sistema a estudiar es de spin semientero solo caben dos posibilidades para su estudio, el uso de la estadística de Maxwell-Boltzmann (clásica) o la de Fermi-Dirac (cuántica). Para decidir la estadística a utilizar tendremos que ver si el sistema es o no degenerado y ello implica estudiar el parámetro de degeneración:

$$y \equiv n\lambda_T^3 \begin{cases} \ll 1 \Rightarrow \text{no degenerado} \\ \sim 1 \Rightarrow \text{degenerado} \end{cases}$$

Donde  $\lambda_T = \frac{h}{p}$  es la longitud de onda de De Broglie y n la densidad. Así pues, para los datos del problema obtenemos:

$$y = 10^{27} \left( \frac{6.62 \times 10^{-34}}{10^{-22}} \right)^3 = 2.90 \times 10^{-7} \ll 1$$

Es decir, que nuestro sistema no es degenerado y por lo tanto no es necesario utilizar una estadística cuántica.

La siguiente cuestión que se nos plantea es la de comparar distintas magnitudes termodinámicas en el caso de que las partículas tuviesen spin  $3/2$  (fermiones) o que tuviesen spin 1 (bosones). Para ello recurramos a las expresiones obtenidas en clase de teoría:

Presión:

$$p = nk_B T [1 \pm 2^{-5/2} y]$$

Capacidad calorífica a volumen constante:

$$C_v = \frac{3}{2} Nk_B [1 \mp 2^{-7/2} y]$$

Entropía:

$$S = Nk_B \left[ \frac{5}{2} - \ln y \pm 2^{-7/2} y \right]$$

Los signos superiores hacen referencia a los fermiones y el inferior a los bosones con lo que vemos que tanto presión como entropía serán mayores en el caso de los fermiones y al contrario en la capacidad calorífica, que es mayor en bosones.