FÍSICA ESTADÍSTICA **(Lic. en Física, UEx; Curso 2007/2008)**

Primer Examen Parcial **8 de Febrero de 2008**

1. *a*) Lucia es una chica italiana que estudia Física en la Universidad de Camerino. Está sopesando la posibilidad de estudiar un año en la UEx con una beca Erasmus y te pide información sobre los estudios de Física en la UEx. Escríbele en no más de unas 30 líneas (sin utilizar expresiones matemáticas) de qué va el primer cuatrimestre de la asignatura de Física Estadística y qué es lo que tú crees que has aprendido en ella. No se trata de enumerar contenidos del programa, sino de llevar a cabo una meditada síntesis personal.

   b) El modelo clásico de Einstein para un sólido consiste en N osciladores armónicos distinguibles de masa m y frecuencia angular ω, descrito por el hamiltoniano

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 \right), \quad f = 3N.$$

   ¿Es éste un sistema ideal, en el sentido de la mecánica estadística? ¿Por qué? ¿Por qué el modelo de Einstein es un *modelo*? ¿Cuál es el origen físico del término de energía potencial? ¿Se tienen en cuenta *de algún modo* las interacciones entre las partículas del sólido?

2. Un sistema pequeño tiene sólo dos niveles energéticos. El nivel inferior tiene energía $E = 0$ y degeneración g_1 (es decir, existen g_1 estados diferentes que tienen esa misma energía), mientras que el nivel superior tiene energía $E = \epsilon$ y degeneración g_2.

   a) Sin realizar ningún cálculo explícito, razona qué valores debe tomar la energía media $\langle E \rangle$ del sistema en los casos límite de temperaturas muy altas y de temperaturas muy bajas. Haz una representación gráfica cualitativa de $\langle E \rangle$ en función de la temperatura T.

   b) Utilizando el resultado del apartado anterior haz una representación cualitativa de la capacidad calorífica $C = \partial\langle E \rangle/\partial T$ en función de la temperatura.

   c) Calcula explícitamente la energía media $\langle E \rangle$ y la capacidad calorífica C en función de T y contrasta los resultados obtenidos con las gráficas cualitativas de los dos apartados anteriores.

   d) ¿Qué magnitud adimensional debe ser suficientemente mayor que la unidad para que podamos decir que estamos en el límite de temperaturas elevadas? Comprueba que en ese límite la capacidad calorífica toma la forma $C = k_B(T_0/T)^2$ y proporciona la expresión para T_0.

   e) Los iones Cr^{3+} en el alumbre de cromo poseen dos niveles energéticos, cada uno doblemente degenerado. Medidas experimentales para temperaturas superiores a $T = 2$ K muestran que la capacidad calorífica por ión es de la forma $C = k_B(T_0/T)^2$ con $T_0 = 0{,}14$ K. Obtén la separación energética entre los dos niveles. ¿Puede considerarse el rango de temperaturas $T > 2$ K como de temperaturas "elevadas"? ¿Por qué?

Nota: $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K $= 8{,}62 \times 10^{-5}$ eV/K

3. Consideremos un fluido clásico de N partículas que se encuentra en equilibrio con un foco de temperatura T *y presión* p. En consecuencia, no sólo la energía E es una magnitud fluctuante, sino también el volumen V. La colectividad estadística que describe este sistema se denomina *isotérmico-isobárica* y está definida por la densidad de probabilidad

$$\rho(q,p,V) = \frac{1}{h_0^f N!\Theta(\beta,p)} e^{-\beta pV} e^{-\beta H(q,p,V)},$$

donde $\Theta(\beta,p)$ es la llamada función de partición isobárica.

a) ¿Qué representa $\rho(q,p,V)$? Escribe la expresión que define la función de partición isobárica.

b) Expresa los valores medios $\langle V\rangle$ y $\langle E\rangle$, así como la varianza $(\Delta V)^2$ en términos de $\Theta(\beta,p)$.

c) Partiendo del resultado anterior, demuestra que

$$d\ln\Theta(\beta,p) = -\beta\langle V\rangle dp - (\langle E\rangle + p\langle V\rangle)d\beta$$

y que, por tanto,

$$d[\ln\Theta + \beta(\langle E\rangle + p\langle V\rangle)] = \beta(d\langle E\rangle + pd\langle V\rangle).$$

d) Teniendo en cuenta la ecuación termodinámica $TdS = dE + pdV$ y la última ecuación del apartado anterior, encuentra la conexión entre la función de partición isobárica Θ y la entropía S. Por último, teniendo en cuenta la identidad termodinámica $G = E + pV - TS$, demuestra que

$$G(T,p) = -k_B T\ln\Theta(\beta,p).$$

4. *a*) Describe los pasos principales que se necesitan para deducir la expresión que relaciona el valor medio $\langle v\rangle$ con el número total de moléculas Φ_0 de un gas ideal que chocan sobre una pared por unidad de área y tiempo.

b) Consideremos un gas constituido por N partículas que ocupan un volumen V y que se encuentra en un estado homogéneo e isótropo de no equilibrio. La función de distribución de velocidades $f(\mathbf{v})$ del gas es constante si $v_1 \le v \le v_2$, siendo cero en cualquier otro caso. Determina el valor de Φ_0 en términos de v_1 y v_2 y de la densidad numérica de partículas $n = N/V$.

c) Indica de forma breve y esquemática los pasos e hipótesis necesarios para la obtención de la ecuación de estado del gas hasta el segundo coeficiente del virial.