**PROBLEMAS DE FÍSICA CUÁNTICA. Curso 2002/2003** **Hoja 7**

1. Calcular la probabilidad de que el electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno se encuentre entre dos esferas de radios $R_1$ y $R_2$. Particularizar el resultado para (a) $R_1 = 0$ y $R_2 = R$; (b) $R_1 = 0$ y $R_2 = a_0$; (c) $R_1 = 0$ y $R_2 = 2a_0$; (d) $R_1 = 0$ y $R_2 = 3a_0$; (e) $R_1 = 0$ y $R_2 = 4a_0$; (f) $R_1 = 0$ y $R_2 = 5a_0$; (g) $R_1 = 0$ y $R_2 = \infty$.

2. (a) Calcular la posición para la cual la densidad de probabilidad radial es máxima para el estado $n = 2$, $l = 1$ del átomo de hidrógeno. (b) Calcular el valor esperado de la coordenada radial en dicho estado. (c) Explicar el significado físico de la diferencia entre las respuestas de (a) y (b).

3. Comparar las probabilidades de presencia del electrón del átomo de hidrógeno dentro del núcleo en los estados del átomo con $n = 1, 2, 3$.

4. Un $\mu^-$ ligado a un protón está en el estado 1s. ¿ Qué probabilidad tiene el muón de estar dentro del protón de radio $R$?

5. Mostrar que en el pozo esférico infinito

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \infty & \text{si } r > a \, , \end{cases}$$

la parte radial de la función de onda viene dada por

$$R(r) = j_\ell \left( \frac{\sqrt{2\mu E_{n\ell}}}{\hbar} r \right) \, ,$$

donde $j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\ell+1/2}(z)$ es la función esférica de Bessel de order $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ y $E_{n\ell}$ es el nivel de energía correspondiente.

6. Obtener la razón entre el valor esperado de la energía cinética y el valor esperado de la energía potencial en el estado fundamental del átomo de hidrógeno.

7. Una partícula de masa $\mu$ se encuentra en un extremo de una barra rígida de masa despreciable y longitud $R$ y gira en el plano $xy$ en torno al otro extremo de la barra, situado en el origen (rotor rígido bidimensional). (a) Encontrar una expresión para la energía total del sistema en términos del momento angular $\boldsymbol{L} = L_z \boldsymbol{k}$. (b) Introduciendo los operadores apropiados en la ecuación de la energía, convertirla en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi, t)}{\partial \varphi^2},$$

donde $I = \mu R^2$ es el momento de inercia y $\Psi(\varphi, t)$ es la función de onda escrita en términos de la coordenada angular. (c) Aplicando la técnica de separación de variables, dividir la ecuación de Schrödinger del rotor rígido para obtener: (1) la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = E\psi(\varphi)$$

y (2) la ecuación para la dependencia con el tiempo de la función de onda. ¿Qué interpretación física tiene la constante de separación $E$? (d) Demostrar que la solución particular para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el rotor rígido es $\psi(\varphi) = A \exp(im\varphi)$, donde $m = \sqrt{2IE}/\hbar$. (e) Aplicar la condición de unicidad a la solución particular del apartado (d). Demostrar entonces que los valores permitidos de la energía total $E$ para el rotor rígido mecánico-cuántico son $E = \hbar^2 m^2 / 2I$ con $|m| = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Comparar con los resultados de la vieja teoría cuántica. (f) Explicar por qué el rotor rígido mecánico-cuántico no posee energia de punto cero. Explicar también por qué no es del todo un modelo realista para un sistema microscópico. (g) Normalizar las funciones encontradas en el apartado (d). (h) Calcular $\langle L_z \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{L}^2 \rangle$, $\langle H \rangle$ y $\langle H^2 \rangle$. (i) Suponer que el rotor rígido está inicialmente en un estado con función de onda $\Psi(\varphi, 0) = A \cos^2 \varphi$. ¿Qué valores del momento angular se podrán obtener? ¿Con qué probabilidad? ¿Qué valores de la energía total $E$ se podrán obtener? ¿Con qué probabilidad? (j) Evaluar de dos modos distintos el valor esperado del momento angular y de la energía del rotor rígido si éste está en el estado cuántico del apartado anterior. (k) Obtener $\Psi(\varphi, t)$ si el rotor se encuentra inicialmente en el estado del apartado (i).

8. Demostrar que $\psi_{211}$ no es función propia de $L_x$ y sí lo es de $L_z$ y $\boldsymbol{L}^2$.

9. Considérese un átomo de hidrógeno descrito por la siguiente función de onda: $\Psi(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{2/3}\psi_{100}(\boldsymbol{r})e^{-iE_1t/\hbar} + \sqrt{1/3}\psi_{211}(\boldsymbol{r})e^{-iE_2t/\hbar}$. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las medidas sobre este estado ofrezcan los resultados $E = E_2$, $\boldsymbol{L}^2 = 2\hbar^2$ y $L_z = \hbar$? (b) ¿Cuáles son los valores esperados de $E$, $\boldsymbol{L}^2$ y $L_z$? (c) ¿Depende $|\Psi|^2$ de $t$? ¿Y de $r$, $\theta$ o $\varphi$? Si depende de $t$, ¿cuál es el periodo de repetición?

10. Una partícula ligada se mueve en el plano $xy$ bajo la influencia del potencial bidimensional $V(x,y) = \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2)$. (a) Demostrar que las funciones (no normalizadas)

$$\psi_{n_x n_y}(x,y) = H_{n_x}(x/a)H_{n_y}(y/a)\exp[-(x^2+y^2)/2a^2],$$

donde $H_n$ es un polinomio de Hermite de grado $n$ y $a \equiv \sqrt{\hbar/M\omega}$, son soluciones de la ecuación de Schrödinger y que su energía es $E_n = (n+1)\hbar\omega$, $n = n_x + n_y$. (b) Comprobar que el nivel energético $E_n$ es $n+1$ veces degenerado. (c) Probar que las autofunciones de energía $E_n$ y momento angular $L_z = m\hbar$ pueden escribirse en la forma $\psi_{nm}(r,\varphi) = R_{nm}(r)\exp(im\varphi)$. ¿Que ecuación satisface $R_{nm}(r)$? (d) Escribir las seis primeras funciones de onda $\psi_{n_x n_y}(x,y)$. (e) Escribir las seis primeras funciones de onda $\psi_{nm}(r,\varphi)$. (f) ¿Qué momentos angulares se pueden medir y con qué probabilidad cuando el sistema está en cada uno de los seis primeros estados cuánticos representados por $\psi_{n_x n_y}(x,y)$?

11. Resolver el oscilador armónico isótropo tridimensional mediante separación de variables en coordenadas esféricas. Comparar el resultado con el obtenido en el problema 12 de la hoja 6.

12. Un electrón está confinado en una cavidad esférica de paredes impenetrables de radio $R$. ¿Cuál será la fuerza radial ejercida por el electrón (que se encuentra en el estado fundamental) sobre las paredes de la cavidad?

13. Sea la siguiente función de onda: $\psi = K(x+y+2z)e^{-\alpha r}$, donde $K$ y $\alpha$ son constantes reales. 1) ¿Cuál es el momento angular total del estado? 2) $\langle L_z\rangle$. 3) Si medimos $L_z$, ¿cuál será la probabilidad de obtener $+\hbar$? 4) Calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en un ángulo sólido $d\Omega$.