1. Encontrar el coeficiente de transmisión para la siguiente barrera de potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \\ V_1 & , \quad x > a, \end{cases}$$

donde $V_0 > V_1 > 0$, cuando (a) $E > V_0$ y (b) $V_1 < E < V_0$.

2. Una partícula de masa m está sometida al siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad 0 < x < a \\ V_0 & , \quad x > a. \end{cases}$$

   (a) Hallar las autofunciones correspondientes a la zona del espectro en que $E > V_0$.

   (b) Hallar la ecuación que determina los valores de la energía en la zona $E < V_0$ y mostrar gráficamente que las energías propias forman un espectro discreto.

   (c) ¿Cuál es el valor mínimo de $2mV_0a^2/\hbar^2$ para el cual el n-ésimo nivel aparece? ¿Cuántos niveles discretos existen si $a^2V_0 = 75\hbar^2/m$?

   (d) Hallar el valor de $2mV_0a^2/\hbar^2$ para el cual la energía del *único* nivel discreto es $E = \frac{1}{2}V_0$. En este caso, cuál es el valor más probable de la posición de la partícula? ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se halle en regiones clásicamente prohibidas?

3. Una partícula se encuentra en el estado fundamental del oscilador armónico simple. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se halle fuera de la región clásicamente permitida?

   Nota: $\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx'\, e^{-x'^2}$, $\mathrm{erf}(1) = 0.84270$

4. Partiendo de que las energías y funciones propias del oscilador armónico son conocidas, encontrar las energías y funciones propias de una partícula de masa m sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

5. Demostrar, por integración de la ecuación de Schrödinger unidimensional en las proximidades de $x = 0$, que para un potencial de la forma $V(x) = -\gamma\delta(x)$, $\gamma > 0$ (pozo delta) las correctas condiciones de contorno a imponer a la función de onda son $\psi(0^-) = \psi(0^+)$ y $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -(2m\gamma/\hbar^2)\psi(0)$. Encontrar las funciones de onda y las energías de los estados ligados.

6. Partículas de masa m y energía E inciden sobre el pozo delta $V(x) = -\gamma\delta(x)$, $\gamma > 0$.

   (a) Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión.

   (b) Hacer un esbozo de la función $T(E)$ para $E \geq 0$.

   (c) Si permitimos a E ser negativa, podemos encontrar que $T(E)$ diverge para cierta energía E_0. Hallar dicha energía.

   (d) ¿Qué fracción de las partículas incidentes sobre el pozo con energía $E = |E_0|$ es transmitida y qué fracción es reflejada?

7. Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para partículas de masa m que inciden sobre la barrera delta $V(x) = \gamma\delta(x)$, $\gamma > 0$. Hacer un esbozo de la función $T(E)$.

8. Sea una partícula de masa m sometida al potencial (doble pozo delta)

$$V(x) = -\gamma\delta(x) - \gamma\delta(x - \ell),\ \gamma > 0,$$

siendo ℓ una cierta longitud.

   (a) Escribiendo la energía en la forma $E = -\lambda^2\hbar^2/2m$, mostrar que las energías de los estados ligados vienen dadas por la relación

$$\exp(-\lambda\ell) = \pm(1 - 2\lambda/\mu),$$

   donde $\mu = 2m\gamma/\hbar^2$. Mostrar la resolución gráfica de esta ecuación.

(b) Probar que el estado fundamental es simétrico respecto del punto $x = \frac{1}{2}\ell$ y que su energía E_s es inferior a la energía E_0 del estado ligado de un solo pozo delta. Representar gráficamente la función de onda correspondiente.

(c) Mostrar que cuando ℓ es mayor que un cierto valor, que deberá hallarse,existe un estado excitado impar de energía E_a superior a E_0.Representar la función de onda correspondiente.

9. Calcúlense los coeficientes de reflexión y transmisión para partículas que se mueven sometidas al potencial $V(x) = \gamma[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$.

10. Una partícula de masa m está sometida al siguiente potencial

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < a \text{ y } 0 < y < b \\ \infty & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Encontrar las energías y funciones propias de la partícula.

(b) Si la partícula se encuentra en el estado fundamental, ¿cuál será la probabilidad de que se encuentre en la región $0 < x < a/3$, $0 < y < b/3$?

(c) Hallar las energías de los primeros cuatro niveles si $a = b$.

(d) Encontrar el número de estados permitidos en el intervalo de energía $(E, E + dE)$.

11. Una partícula de masa m se mueve en el potencial tridimensional $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$. Hallar las energías permitidas y el grado de degeneración del nivel n-ésimo.