PROBLEMAS DE FÍSICA CUÁNTICA. Curso 2002/2003 **Hoja 5**

1. Comprobar que $\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp\left[i(kx-\omega t)\right] A(k)$, es solución de la ecuación de Schrödinger (con potencial nulo) en una dimensión siempre y cuando se verifique una relación entre k y ω (relación de dispersión). Si $\psi(x,0) = N\exp(-\alpha^2 x^2)$, calcular la constante N y $\psi(x,t)$.

2. Suponiendo que la amplitud de probabilidad, sin normalizar, de encontrar una partícula en la posición x es
$$\phi(x) = \exp\left[i\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right].$$
a) Normalizar la función. b) ¿ Qué significado tiene p_0? c) ¿ Cuál es la probabilidad de que la partícula tenga un momento mayor que p_0?

3. Si $\phi(x) = N\exp(ip_0x/\hbar)/\sqrt{x^2+a^2}$, donde a y p_0 son reales. a) Determinar N para que la función $\phi(x)$ esté normalizada a la unidad. b) Calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el intervalo $(-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3})$. c) Encontrar el valor medio de p.

4. Considérese una partícula de masa m que se puede mover libremente a lo largo del eje x desde $x = -a/2$ hasta $x = +a/2$, pero que le está estrictamente prohibido hallarse fuera de esta región. (a) Comprobar que la función de onda del estado fundamental es
$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a)e^{-iEt/\hbar}\ , & -a/2 < x < +a/2 \\ 0\ , & |x| > a/2 \end{cases}$$
y hallar el valor de la energía E. (b) Hallar la probabilidad de encontrar la partícula entre las coordenadas $x = a/6$ *y* $x = a/2$. (c) Comparar con la predicción clásica.

5. (a) Verificar que la función de onda
$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\ \sin(2\pi x/a)e^{-iEt/\hbar}\ , & -a/2 < x < +a/2 \\ 0\ , & |x| > a/2 \end{cases}$$
es una solución a la ecuación de Schrödinger para el mismo sistema del problema 4. (b) La función de onda anterior corresponde al primer estado excitado. Determinar el valor de la energía E de la partícula en dicho estado y compararla con la energía del estado fundamental. (c) Dibujar la dependencia espacial de esta función de onda. Compararla con la función de onda para el estado fundamental y dar un argumento cualitativo que relacione la diferencia en las dos funciones de onda con la diferencia en las energías de los dos estados.

6. (a) Normalizar las funciones de onda de los problemas 4 y 5 ajustando los valores de las constantes multiplicativas A. (b) Hallar $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p_x\rangle$ y $\langle p_x^2\rangle$ en ambos casos. Calcular $\Delta x\ \Delta p_x$.

7. (a) Utilizando las primeras dos funciones de onda normalizadas $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ del problema 4, construir la combinación lineal $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$. Derivar una relación que incluya las constantes ajustables c_1 y c_2 tales que $\Psi(x,t)$ también está normalizada. (b) Utilizando las función normalizada $\Psi(x,t)$ apartado (a), calcular el valor esperado de la energía total E de la partícula en términos de las energías E_1 y E_2 de los dos estados y de los valores de c_1 y c_2. Interpretar el significado del resultado.

   (c) Si la partícula descrita por la función de onda del apartado (a) es un protón que se mueve en un núcleo, dará lugar a una distribución de carga que oscila en el tiempo con la misma frecuencia que las oscilaciones de su densidad de probabilidad. Evaluar esta frecuencia para los valores de E_1 y E_2 correspondientes a una masa del protón de 10^{-27} kg y una dimensión nuclear de 10^{-14} m. Evaluar también la frecuencia y la energía del fotón que emitiría esta distribución de carga oscilante cuando el protón pasara de su estado excitado a su estado fundamental. ¿En qué región del espectro electromagnético está este fotón?.

8. Considérese el problema 7 con $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$. (a) Hallar $\langle x(t) \rangle$ y $\langle p_x(t) \rangle$. (b) Verificar que $\langle p_x(t) \rangle = m \, d\langle x(t) \rangle / dt$.

9. Demostrar que en los estados estacionarios ligados el valor esperado del momento es cero: $\langle \boldsymbol{p} \rangle = 0$.

10. Una partícula se mueve en el pozo de potencial (de paredes infinitamente altas) de la figura adjunta. Dibújese cualitativamente la función de onda de un estado ligado $\phi_n(x)$ para $n > 1$.