FÍSICA CUÁNTICA. Examen Final. Convocatoria de Septiembre. 4/9/2003.

---

1. Estimar el orden de magnitud de las siguientes cantidades:
1) Longitud de onda Compton del electrón (en cm).
2) Radio de Bohr del hidrógeno (en Angstroms).
3) Constante de estructura fina.
4) Diferencia típica de energías en estructura fina (en eV).
(2 puntos)
Ayuda: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

---

2. Calcular el estado fundamental del oxígeno ($Z = 8$) considerando primero la interacción residual y posteriormente teniendo en cuenta la interacción espín-órbita. Si aplicamos un campo magnético débil $B = 0.005$ T, ¿cuál será la separación en energía de los nuevos niveles (en eV)? (2 puntos)

Ayuda. El magnetón de Bohr: $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 5.788 \times 10^{-5}$ eV/T.

---

3. Consideremos que el protón tiene tamaño finito y que no es por tanto una partícula puntual. Supondremos que el protón puede representarse como una esfera de radio R con toda su carga, e, distribuida uniformemente en su superficie. La energía potencial del sistema electron-proton es por tanto:

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si} \quad r \geq R \, , \\ -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{si} \quad r \leq R \, . \end{cases}$$

Relacionando este potencial con el coulombiano, definir una perturbación sobre el hamiltoniano del átomo de hidrógeno con un potencial coulombiano. Calcular en primer orden en teoría de perturbaciones el cambio en la energía del estado fundamental debido a considerar el tamaño finito del protón. (3 puntos)

Ayuda. La función de onda del estado fundamental del átomo de hidrógeno es

$$\phi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \, ,$$

siendo a_0 el radio de Bohr. En el cálculo de las integrales asumir que $R \ll a_0$.

---

4. En $t = 0$ una partícula de masa m en un potencial armónico $V = \frac{1}{2}kx^2$ tiene como función de onda

$$\psi(x, t = 0) = A \exp(-\alpha^2 x^2/2) \left[\cos\beta \; H_0(\alpha x) + \frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}} H_2(\alpha x) \right] \, ,$$

donde $\alpha \equiv \sqrt{mk}/\hbar$ y β y A son constantes reales. $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite, que tienen la siguiente normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \exp(-\alpha^2 x^2) \; H_n(\alpha x)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} 2^n n! \, .$$

1) Calcular $\psi(x, t)$.
2) ¿Cuáles son los posibles valores de la energía y con qué probabilidades podemos obtenerlos?
3) Calcular $\langle x \rangle$ en $t = 0$, ¿cómo cambia $\langle x \rangle$ con el tiempo?
(3 puntos)
Ayuda. La función de onda del nivel $n-$ésimo del oscilador armónico es: $\phi_n(x) \propto \exp(-\alpha^2 x^2/2) H_n(\alpha x)$.
