FÍSICA CUÁNTICA. Examen Final. 22/6/2001.

Problema 1.

Calcular la energía del estado fundamental (en eV) y el radio de Bohr (en Å) del positronio. ¿Cuál es la degeneración del estado fundamental debido al espín del electrón y del positrón? (2 puntos)

Problema 2. Sea el siguiente potencial unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \,, \\ -V_0 & 0 < x < a \,, \\ 0 & x > a \,. \end{cases}$$

donde $V_0 > 0$. Si una partícula incide desde la izquierda ($x < 0$) con energía E, calcular el coeficiente de transmisión. ¿Para qué valores de la energía el coeficiente de transmisión es 1 (resonancia)? (2 puntos).

Problema 3.

Considerese una partícula moviéndose en un potencial esféricamente simétrico tridimensional $V(r) = kr$, donde k es una constante.

1. Usando el principio de incertidumbre estimar la energía del estado fundamental. (1 punto)
2. Usando el método variacional estimar la energía del estado fundamental. Ayuda: Úsese la siguiente familia de funciones prueba: $\psi_\lambda \propto \exp(-\lambda r/2)$. (1 punto)
3. (Solo para aquellos que vayan a subir nota). Calcular exactamente la energía del estado fundamental.

Problema 4.

Encontrar la configuración del estado fundamental del átomo de Azufre ($Z = 16$). ¿Qué términos aparecerán para la citada configuración? Si tenemos en cuenta la interacción residual, realizar un esquema de los términos en función de su energía. Si consideramos la interacción espín-orbita, ¿cuál será el momento angular total del estado fundamental? Si se aplica un campo magnético de $B = 0.05$T estudiar el desdoblamiento del estado fundamental calculando en eV la diferencia en energía entre los niveles desdoblados. (2 puntos)

Problema 5.

Sea una partícula de espín $S = 1$.

1. Escribir el operador de espín que correspondería a la medida del espín en la dirección $(1, 1, 1)$. (0.5 puntos)
2. Si preparamos un estado con $0\ \hbar$ como proyección de spin en el eje Z y posteriormente medimos S_x, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades? Si obtenemos $-\hbar$ en la medida anterior, ¿cuál será la función de onda de espín de la partícula inmediatamente después de la medida? (1.5 puntos)

Ayuda:

- El operador de espín para partículas de espín $S = 1$ es $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ con:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar \ ,$$

$$S_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar \ ,$$

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \hbar \ .$$

- Función $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx \ x^{s-1} e^{-x} \ , \quad s > 0 \ .$$

  Donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n es un entero positivo (con $\Gamma(1) = 1$).

- Laplaciano en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \ .$$