FÍSICA CUÁNTICA. Segundo Parcial. 24/5/2001.

Problema 1.
La componente z del espín de un electrón es medida encontrándose el valor $+\hbar/2$.

1. Si inmediatamente después medimos S_x, ¿cuáles son los posibles resultados de la medida y con qué probabilidades? (1.5 puntos)
2. Si después de haber medido S_x, habiéndose obtenido $-\hbar/2$, medimos el espín a lo largo de la dirección $(1, 0, 1)$, ¿cuáles son los posibles resultados de la medida y con qué probabilidades? (1.5 puntos)

Problema 2.
Consideremos que el protón es una esfera uniformemente cargada de radio $R = 10^{-15}$m. La carga total del protón es $e > 0$. Usando el teorema de Gauss es inmediato ver que el potencial que actua sobre el electrón en el átomo de hidrógeno ya no es coulombiano sino que tiene la forma:

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si} \quad r \geq R\,, \\ -\left[3 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right] \dfrac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{si} \quad r \leq R\,. \end{cases}$$

Relacionando este potencial con el coulombiano, definir una perturbación sobre el hamiltoniano del átomo de hidrógeno con un potencial coulombiano.
Mediante teoria de perturbaciones estudiar:

- La corrección en energía al estado fundamental (en eV). (1.5 puntos)

  Nota. En este subapartado considerar que $R \ll a_0$ (donde a_0 es el radio de Bohr) en el cálculo de la integral.

- Considerar el estado $n = 2$. a) Escribir la matriz de la perturbación en este estado. b) Determinar qué elementos de matriz son cero. c) Expresar los elementos de matriz no nulos usando integrales exclusivamente radiales. d) En función de estas integrales radiales calcular las correcciones en energía. e) ¿Cuáles son los nuevos autoestados a primer orden en teoría de perturbaciones? ¿La perturbación rompe completamente la degeneración del estado $n = 2$?

  (1.5 puntos)

  Nota: En este subapartado solo hay que calcular las integrales angulares y dejar indicadas las integrales radiales.

Problema 3.
Encontrar la configuración del estado fundamental del átomo ^{34}Se. ¿Qué términos aparecerán para la citada configuración? Si tenemos en cuenta la interacción residual, realizar un esquema de los términos en función de su energía. Si consideramos la interacción espín-orbita, ¿cuál será el momento angular total del estado fundamental? (3 puntos)

Problema 4.
Escribir la función de onda de dos partículas idénticas de espín 1/2 que se mueven en un cierto potencial no interaccionando entre ellas y ambas en el estado fundamental. ¿Cuál será el espín del estado fundamental y su degeneración? (0.5 puntos)

Contestar a las preguntas anteriores si las dos partículas fueran distinguibles. (0.5 puntos)

Ayuda:

- El operador de espín para partículas de espín $\frac{1}{2}$ es $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La función de onda del estado fundamental de un átomo de hidrógeno es

$$\phi_{100}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \exp(-r/a_0)\,,$$

  donde $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(\mu e^2) \simeq 0.529 \times 10^{-10}$ m es el radio de Bohr. La energía del estado fundamental está dada por:

$$E_1 = -\frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)a_0} \simeq -13.6 \text{ eV}\,.$$