

COMENTARIO INVITADO

Premio Nobel de Física 2021

Ordenando el desorden

Juan J. Ruiz-Lorenzo

La teoría de la rotura de la simetría de las réplicas ha tenido un impacto tremendo en diferentes campos de la ciencia, permitiendo entender de una manera más profunda el comportamiento de sistemas que denominamos complejos.



Ill. Niklas Elmehed. © Nobel Media

Giorgio Parisi acaba de ser premiado con la mitad del Premio Nobel de Física de 2021 “for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales”. El *interplay of disorder and fluctuations* de la motivación de la academia sueca es lo que técnicamente está codificado en la frase “Rotura de la Simetría de las Réplicas (RSB)”. La teoría RSB, desarrollada en el contexto de la investigación básica en el ámbito de la física, ha conseguido tener aplicaciones en campos muy diversos de la ciencia (muchos de ellos de gran interés en las aplicaciones). Para intentar entender qué es la teoría RSB, no hay nada mejor que comenzar por el principio: los vidrios de espín¹.

1. Vidrios de espín y la rotura de la simetría de las réplicas

Los vidrios de espín son aleaciones metálicas, donde átomos metálicos (por ejemplo de cobre) son sustituidos de manera muy diluida y al azar por átomos magnéticos (por ejemplo manganeso) [1-3]. Estas aleaciones presentan una dinámica muy lenta (usualmente se encuentran en una situación fuera del equilibrio) similar a la de los vidrios estructurales y presentan propiedades magnéticas (que podemos asociar con el espín de las impurezas magnéticas), por lo que se denominan vidrios de espín. Algunos ejemplos de materiales con este comportamiento son Ag:Mn (diluido al 2.5%), $\text{CdCr}_{1.7}\text{In}_{0.3}\text{S}_4$ y $\text{Fe}_{0.5}\text{Mn}_{0.5}\text{TiO}_3$.

Las dos formas principales de magnetismo que aparecen en la naturaleza son el ferromagnetismo y el antiferromagnetismo. Un sistema ferromagnético, por debajo de la temperatura de Curie, presenta un orden magnético: todos los espines apuntan esencialmente a la misma dirección, lo que

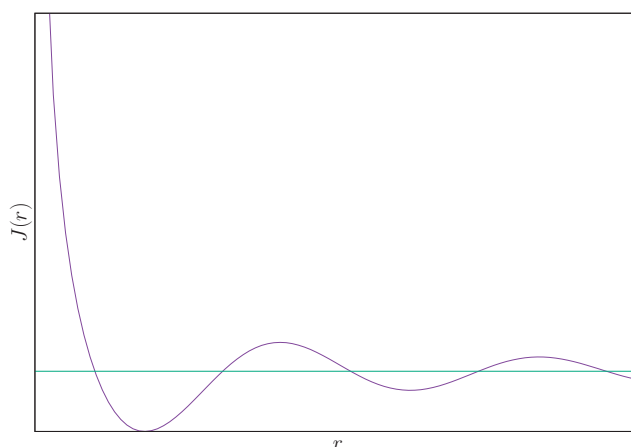


Fig. 1. Acoplamiento efectivo entre los espines de los electrones de los átomos magnéticos.

induce una imanación total no nula. Los materiales antiferromagnéticos presentan un orden que podríamos denominar escalonado (*staggered*), donde se produce una alternancia regular entre imanación positiva y negativa de los espines individuales [1].

Los vidrios de espín no presentan imanación asociada ni con el ferromagnetismo ni con el antiferromagnetismo, aunque sí presentan una transición de fase entre una fase paramagnética y otra vidrio de espín (asociada a una divergencia de la susceptibilidad no lineal en vez de la lineal, como ocurre en los ferro y antiferromagnetos)². Un vidrio de espín presenta una fase de baja temperatura completamente desordenada pero congelada: cada espín apunta a una dirección diferente pero esencialmente constante en el tiempo, la suma de todos los espines, que es proporcional a la imanación, es cero.

La interacción entre los átomos magnéticos está mediada por los electrones de la banda de conducción del metal, lo que da lugar a un acoplamiento entre los mismos de forma

¹ Unos breves apuntes biográficos del galardonado. Romano de nacimiento (1948), se laureó en física en la Universidad de Roma La Sapienza bajo la dirección de N. Cabibbo. Realizó estancias de investigación en la universidad de Columbia (NY), en el Instituto de Estudios Avanzados de París y en la Escuela Normal Superior de esta misma ciudad. Trabajó en el Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (Frascati) y fue catedrático en las Universidades de Roma Tor Vergata y La Sapienza. Actualmente es profesor emérito de esta última universidad. Ha sido presidente de Accademia dei Lincei.

² Dadas la imanación M y la susceptibilidad magnética χ en un campo magnético H , la susceptibilidad no lineal χ_2 se calcula como:

$$\chi - \frac{M}{H} = \chi_2 H^2 + O(H^4).$$

sinusoidal (teoría de Ruderman, Kittel, Kasuya y Yosida [1]), (Fig. 1). Por lo tanto coexisten en el material acoplamientos ferromagnéticos ($J > 0$) que tienden a alinear los espines en el mismo sentido y antiferromagnéticos ($J < 0$) que tienden a alinear los espines en sentidos opuestos. El hecho de que los acoplamientos cambien de signo al variar la distancia hace que teóricamente sea muy conveniente considerarlos como variables aleatorias, por ejemplo, de una distribución normal de media cero y varianza unidad³.

Por otro lado los tiempos característicos de estos acoplamientos son mucho mayores que la dinámica de los electrones de los átomos magnéticos, lo que hace que el sistema pueda estudiarse en lo que se denomina la aproximación congelada o *quenched*⁴. Por lo tanto el estudio de la mecánica estadística de estos materiales se realiza en dos pasos [3]:

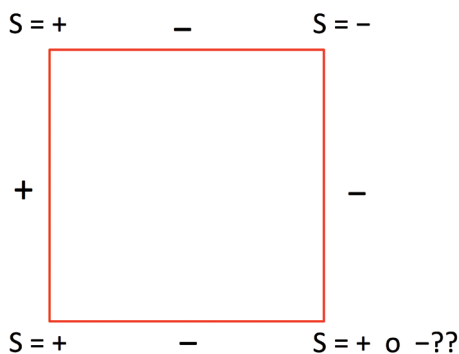
1. Se calcula la función de partición (que es la suma a todas las posibles configuraciones de espines pesadas con el factor de Boltzmann $\exp(-E/k_B T)$) y a continuación se calcula la energía libre asociada (proporcional al logaritmo de la función de partición) para una configuración fija de los acoplamientos.
2. Posteriormente, se media esta energía libre (que depende de los acoplamientos) sobre la distribución de probabilidad de los mismos, lo que nos dará la energía libre termodinámica, con la cuál podremos calcular diferentes magnitudes como la energía interna, imanación, entropía, etc.

Si denotamos Z_J a la función de partición con los acoplamientos J s fijos, la energía libre termodinámica se expresa como

$$F = -k_B T \log Z_J,$$

donde $\overline{(\dots)}$ es la media sobre la distribución de los acoplamientos y además denotaremos por $\langle(\dots)\rangle$ el promedio mecánico-estadístico sobre una realización dada del desorden.

El origen de las sorprendentes propiedades físicas de estos materiales es la aparición simultánea de desorden (en la síntesis de la aleación) y frustración. Este último concepto, frustración, presenta el mismo significado que en el lenguaje coloquial. Supongamos que tenemos tres perso-



nas, A, B y C. Establezcamos que A y B son amigos y que A y C son enemigos. ¿Podrían ser B y C amigos? En estos materiales, minimizar la energía da lugar a mucha frustración: el sistema presenta muchas configuraciones con la misma energía o casi la misma energía (Fig. 2). Desorden y frustración dan lugar a la aparición de un paisaje de energía libre muy complejo (Fig. 3): un gran número de mínimos absolutos ("valles") y relativos separados por barreras muy altas de energía libre. Esto da lugar a que la dinámica, como ya se ha comentado, sea muy lenta: el sistema se queda atrapado en un mínimo local y necesita mucho tiempo para (mediante fluctuaciones térmicas) saltar las altas barreras de energía libre para caer en, posiblemente, un nuevo mínimo local y así sucesivamente.

El punto de partida de los estudios analíticos de estos materiales es el modelo de Edwards y Anderson, cuyo Hamiltoniano (energía) está dado por

$$\mathcal{H}_J = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j, \quad (1)$$

donde la suma es sobre las posiciones de átomos magnéticos que son primeros vecinos en la red cristalina, los acoplamientos J_{ij} se extraen de una distribución normal con media cero y varianza unidad, y S_i representa el espín situado en el punto i -ésimo de la red: se asumirá que los grados de libertad magnéticos se representan mediante espines de tipo Ising, que solo pueden orientarse hacia el norte o hacia el sur, lo que equivale a que S_i solo pueda tomar los valores $+1$ y -1 .

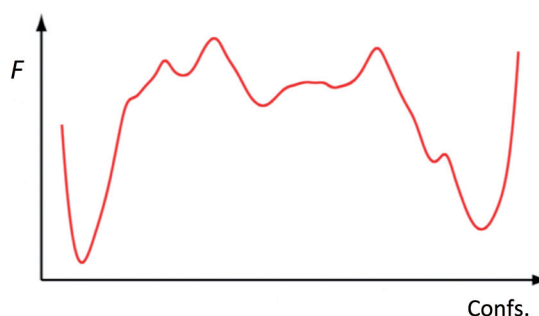


Fig. 2. Cuadrado frustrado. Un acoplamiento positivo minimiza la energía si los dos espines que conecta son del mismo signo, y, si el acoplamiento es negativo, los espines se orientarán con signos opuestos. Partimos de un espín positivo en el vértice inferior izquierdo y nos preguntamos sobre el valor del espín situado en el vértice del inferior derecho. Si recorremos el cuadrado en el sentido de las agujas del reloj obtenemos un valor positivo, mientras que si lo recorremos en sentido opuesto, un valor negativo. ¿Qué espín elegirá el sistema? ¡Frustración!

Fig. 3. Paisaje de energía libre, F , en función del espacio de configuraciones (que lo representamos, de manera muy simplificada, como un sistema "complejo"). Este paisaje presenta un gran número de mínimos absolutos y relativos separados por altas barreras de energía libre, lo que induce una dinámica muy lenta.

³ Se puede demostrar que los resultados analíticos solo dependen de los valores de los dos primeros momentos de la distribución usada.

⁴ Esta aproximación es análoga a la que usa en el estudio de las moléculas conocida como aproximación de Born-Oppenheimer, donde los grados de libertad electrónicos tienen unos tiempos característicos mucho menores que los de los núcleos. Este hecho permite estudiar la molécula suponiendo que la posición de los núcleos está "congelada" (masa infinita).

Fig. 4. Estructura de la matriz Q_{ab} después de dos pasos de rotura de la simetría de las réplicas.

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 & q_2 & \dots & q_1 \\ q_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & \dots & q_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}}^{m_1} & \dots & q_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_0 & \dots & q_2 & 0 & \dots & q_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & \dots & q_2 & \dots & 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Como es usual en mecánica estadística el modelo fue analizado en la aproximación de campo medio por Sherrington y Kirkpatrick [3] (modelo SK)⁵. Para ello comenzaron usando el llamado truco de las réplicas. En el estudio del desorden *quenched* hay que promediar el logaritmo de la función de partición, y este cálculo no se puede realizar analíticamente. Para poder proceder se usa la siguiente representación del logaritmo

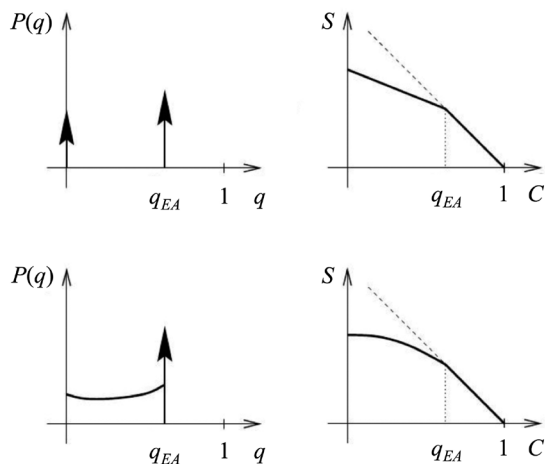
$$\log Z_j = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z_j^n - 1}{n}, \quad (2)$$

es decir, necesitamos calcular la función de partición de n réplicas no interaccionantes del sistema y posteriormente promediar sobre el desorden. El resultado final consiste en encontrar el mínimo de un Hamiltoniano efectivo \mathcal{H}_n (que es la energía libre por espín termodinámica) [3]

$$f = \lim_{n \rightarrow 0} \min_{Q_{ab}} \mathcal{H}_n(Q_{ab}), \quad (3)$$

donde Q_{ab} es una matriz simétrica $n \times n$ con diagonal nula, que se denomina matriz de solapamientos (*overlaps*).

Fig. 5. En la línea superior, izquierda, se representa la $P(q)$ para 1-RSB, mientras que la correspondiente para una rotura completa (∞ -RSB) puede verse en la línea inferior, izquierda. Al ser $P(q)$ una función par (en ausencia de un campo magnético externo) solo se representa la parte positiva. En la columna de la derecha se representa $S(C) \equiv \int_C^1 du \int_{-u}^u dq' P(q')$ para 1-RSB (superior derecha) e ∞ -RSB (inferior derecha). Nótese que $P(C) = -\frac{\partial^2 S(C)}{\partial C^2}$. La función $S(C)$ juega un papel muy importante en el análisis de algunos experimentos.



⁵ La aproximación de campo medio es equivalente a trabajar en dimensión infinita. En una red hipercúbica D -dimensional, un espín tiene $2D$ vecinos. Cuantos más vecinos tiene un espín más complicado es que se generen fluctuaciones en el sistema. Eventualmente en dimensión infinita se eliminan las fluctuaciones.

La primera aproximación es elegir todos los elementos no nulos de la matriz Q_{ab} constantes e iguales a q_0 , es decir

$$Q_{ab} = q_0 (1 - \delta_{ab}). \quad (4)$$

Esta solución la denominamos simetría de las réplicas (o *replica symmetric*, RS). Nótese que esta matriz es invariante bajo la actuación del grupo de permutaciones de n elementos, S_n : $Q_{ab}^\pi = Q_{ab}$, $\forall \pi \in S_n$ y $\forall a, b = 1, \dots, n$.

Sin embargo la energía libre calculada con esta solución proporcionaba una entropía negativa a $T = 0$ y la energía interna no se correspondía con la calculada mediante simulaciones numéricas. Además, calculados los autovalores de la matriz hessiana (para comprobar que es un mínimo) se encontró que uno de ellos, el denominado modo replicón, tomaba valores negativos, por lo que la solución no era la buscada (un mínimo).

Para resolver este problema, Parisi propuso en 1979 el siguiente esquema recursivo [4].

El punto de partida consiste en considerar un n muy grande y un número natural m_1 divisor de n . Consideremos las subcajas $m_1 \times m_1$ a lo largo de la diagonal: en estas subcajas se cambian todos los q_0 de la solución RS por q_1 . Se comprueba que la entropía a $T=0$ y el modo replicón de esta solución son menos negativos que los del paso anterior. Nótese que ya no se verifica que $Q^\pi = Q$, $\forall \pi \in S_n$ y la matriz Q_{ab} solo es invariante bajo un subgrupo del grupo de permutaciones: ha ocurrido lo que técnicamente se denomina una rotura espontánea de la simetría de las réplicas (*Replica Symmetry Breaking* [RSB]). A este primer paso se le denomina 1-paso RSB o simplemente 1-RSB. En otros modelos, por ejemplo en el modelo de Potts vidrio de espín (con más de cuatro estados), este primer paso ya proporciona la solución exacta, y no es necesario continuar.

El segundo paso (2-RSB) consiste en escoger un número natural m_2 divisor de m_1 y crear submatrices $m_2 \times m_2$ a lo largo de la diagonal y dentro de las submatrices $m_1 \times m_1$ del paso anterior: en estas submatrices se cambian todos los q_1 por q_2 . Podemos ver esta situación en la Fig. 4. Tanto la entropía a temperatura cero y el modo replicón ya son muy pequeños en valor absoluto (en relación a los valores de partida) a este nivel del cálculo.

La solución que proporcionaba un modo replicón y una entropía nulos se obtenía después de un número infinito de roturas ($1 \ll n > m_1 > m_2 > \dots$) y se denomina rotura completa de la simetría de las

⁶ Definida de la manera canónica como $Q_{ab}^\pi = Q_{\pi(a), \pi(b)}$, donde $\pi \in S_n$ es una permutación.



Fig. 6. Miguel Virasoro (recientemente fallecido), Giorgio Parisi y Marc Mézard, durante la celebración del 40 aniversario de la aparición de la teoría RSB en la Universidad de Roma La Sapienza (congreso RSB40, septiembre de 2019) (fotografía: S. Franz).

réplicas⁷ o *full Replica Symmetry Breaking* (∞ -RSB) en inglés. Se puede demostrar que la secuencia de valores q_i ($i = 0, \dots, n$) se convierte en una función continua $q(x)$ con $x \in [0, 1]$ cuando al final de este procedimiento recursivo se toma finalmente el límite $n \rightarrow 0$. El parámetro de orden en esta transición ya no es un valor como la imanación, sino una función $q(x)$. Además la existencia de un modo cero en el hessiano da lugar a una fase marginalmente estable.

Parisi calculó además la probabilidad de obtener un solapamiento q en la matriz de solapamientos, obteniendo:

$$P(q) = \frac{dx}{dq}. \quad (5)$$

Además

$$\langle \bar{q} \rangle \equiv \int dq q P(q) = \frac{1}{N} \sum_i \bar{m}_i^2, \quad (6)$$

donde $m_i = \langle S_i \rangle$ es la imanación del punto i -ésimo de la red y N es el número de espines del material. La susceptibilidad vidrio de espín (que diverge en el punto crítico) está dada por

$$\chi_{SG} = N \langle \bar{q}^2 \rangle = N \int dq q^2 P(q) \quad (7)$$

y es proporcional a la susceptibilidad no lineal, χ_2 , que puede medirse experimentalmente.

La forma funcional de la densidad de probabilidad $P(q)$ puede verse en la Fig. 5 para los casos 1-RSB e ∞ -RSB.

Las propiedades físicas de esta solución matemática (∞ -RSB) las estableció Parisi en los siguientes siete años, fundamentalmente en colaboración con M. Virasoro y M. Mézard (Fig. 6). Podemos reseñar:

1. La solución de Parisi es exacta en dimensión infinita. Esto ha sido probado rigurosamente en los trabajos de diferentes físico-matemáticos y matemáticos, pudiendo citarse a F. Guerra, M. Tallagrand y D. Panchenko [5-7].
2. Es posible obtener esta solución sin el uso de las réplicas mediante el método de la cavidad [3].
3. Presenta un número infinito de estados puros no relacionado por ninguna simetría global (por ejemplo la inversión de todos los espines). Un estado puro es una fase homogénea de la materia, y, por lo tanto, en un estado puro las magnitudes intensivas no fluctúan. Por ejemplo un estado con una interfase separando una región de imanación positiva de otra región con imanación negativa no sería un estado puro. Se puede “asociar” un estado puro con las diferentes configuraciones que viven en los “valles” de energía libre (mínimos absolutos) y que están separados entre ellos por barreras de energía libre.

Además $Q_{ab} = q_{ab}$ nos da el solapamiento (producto escalar) entre la imanación de los estados a y el b (con imanaciones $m_i^{(a)}$ y $m_i^{(b)}$ respectivamente):

$$q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_i \overline{m_i^{(a)}} m_i^{(b)}. \quad (8)$$

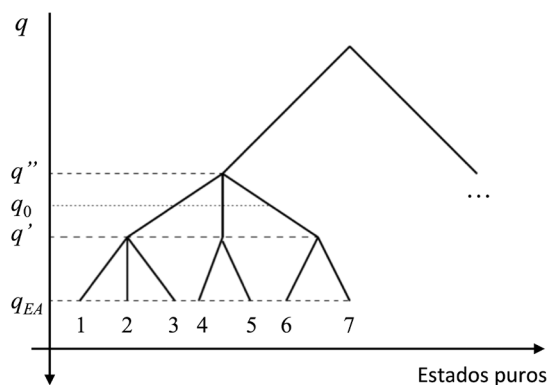


Fig. 7. Organización ultramétrica de los estados puros en un vidrio de espín. Por ejemplo el valor del solapamiento q entre los estados 1 y 7 es q'' , que es el valor del solapamiento del primer ancestro común en el árbol ultramétrico. El solapamiento de un estado consigo mismo es el máximo posible en el sistema, q_{EA} .

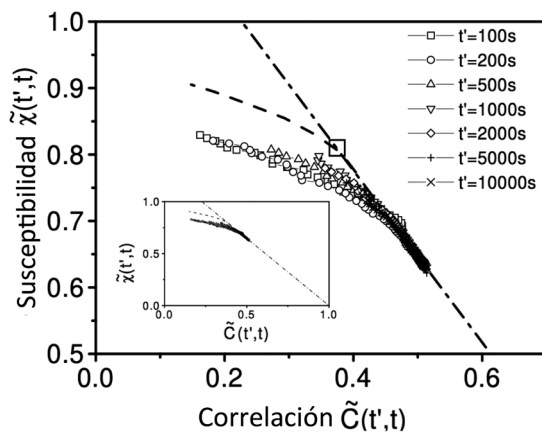
4. Estos infinitos estados puros están organizados de manera ultramétrica (Fig. 7). Esta es la organización de las diferentes especies en biología y también de los números p -ádicos en matemáticas⁸.

⁸ Un espacio es ultramétrico si para cualquier tripleta de elementos de este espacio (A, B, C) y una distancia $d(\cdot, \cdot)$ se verifica

$$d(A, B) \leq \max(d(A, C), d(B, C)).$$

⁷ Más correctamente debería denominarse rotura espontánea completa de la simetría bajo el grupo de permutaciones de las réplicas.

Fig. 8. Estudio experimental del vidrio de espín [10] $\text{CdCr}_{1.7}\text{In}_{0.3}\text{S}_4$ a $T = 0.8T_g$, donde $T_g = 16.2$ K es la temperatura de la transición de fase. Se representa la respuesta (susceptibilidad) frente a la autocorrelación para diferentes tiempos de espera t' , momento en el cuál se enciende un campo magnético. La modificación del teorema de fluctuación-disipación fuera del equilibrio permite identificar la dependencia funcional de la susceptibilidad como función de la correlación con la función $S(C)$ definida en el pie de la Fig. 5 para tiempos largos.



5. La fase vidrio de espín es estable bajo un campo magnético pequeño (H). La línea que separa las fases vidrio de espín y paramagnética, en un diagrama (T, H) , se denomina línea de Almeida-Thouless [3].

El solapamiento, que juega un papel primordial en la teoría, no es accesible en los experimentos, aunque sí su susceptibilidad χ_{SG} . Sin

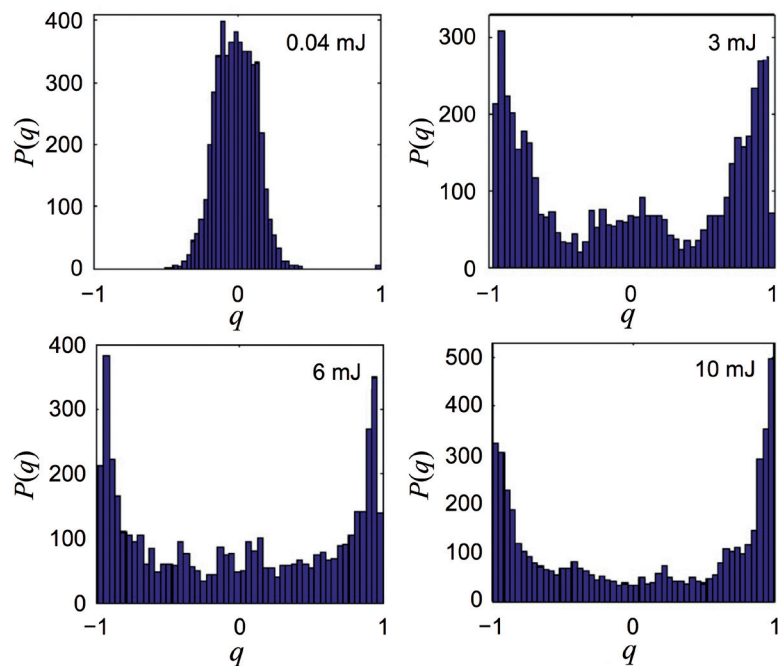


Fig. 9. Densidad de probabilidad del solapamiento en un sistema experimental de láseres aleatorios. El solapamiento tiene en cuenta la correlación entre las intensidades de los diferentes pulsos. La energía que se inyecta juega el papel del inverso de la temperatura en el modelo magnético equivalente. El panel superior izquierdo corresponde a una distribución centrada en cero, que se correspondería con la fase paramagnética de un vidrio de espín. Nótese que conforme se aumenta la energía inyectada (disminuye la temperatura del sistema equivalente) se comienza a obtener una forma compatible con 1-RSB [12].

En vidrios de espín la definición de distancia entre dos estados puros a y b es:

$$d(a, b) = \frac{1}{2} (q_{EA} - q_{ab}),$$

donde el máximo solapamiento es el de un estado consigo mismo y se denota como $q_{EA} = q_{aa}$, y es independiente del estado a elegido.

embargo, usando la modificación del teorema de fluctuación-disipación en situaciones fuera del equilibrio [8, 9] sí que es posible acceder experimentalmente a la densidad de probabilidad $P(q)$ [10]. En la Fig. 8 se puede comparar la dependencia experimental entre la susceptibilidad y la correlación con la predicción teórica $S(C)$, definida y mostrada en la Fig. 5. Y el acuerdo es muy alto: la $P(q)$ experimental presenta una forma cualitativamente similar a la predicción ∞ -RSB. Simulaciones numéricas usando el superordenador Janus I han llegado a la misma conclusión [11].

La densidad de probabilidad del solapamiento también ha sido medida en experimentos con láseres “aleatorios” (donde la luz se amplifica y se propaga a través de un medio desordenado) que simulan un comportamiento similar a los vidrios de espín: los resultados para $P(q)$ se muestran en la Fig. 9 y el sistema se comporta siguiendo 1-RSB [12].

2. Aplicaciones de la teoría RSB

Aunque el origen de la teoría RSB fue el estudio de los vidrios de espín, sus aplicaciones en diferentes campos de la física y de la ciencia han sido muy importantes. A continuación describiremos algunos de estos problemas.

En primer lugar se pueden citar los vidrios (¡y se cierra el círculo!). En estos sistemas ha tenido una gran aplicación la teoría de Parisi en el estudio de la transición vítrea, la fase vítrea (1-RSB), la fase de Gardner (marginamente estable, ∞ -RSB) y la transición de fase de *jamming* [13]. La fase de Gardner (marginamente estable) ha sido encontrada en experimentos con coloides [14].

Otro campo donde ha tenido una gran aplicación ha sido en el estudio de redes neuronales y *machine learning*. Se puede citar, por ejemplo, la solución usando réplicas del modelo de Hopfield [3].

La aplicación de las técnicas RSB en el campo de la optimización ha proporcionado una mayor comprensión sobre los problemas computacionalmente difíciles. Por ejemplo, la solución del problema 3-SAT (3-satisfacibilidad) aleatorio [15]. Para definir el problema 3-SAT aleatorio hay que definir en primer lugar el clásico problema en la teoría de la complejidad denominado 3-SAT, que pertenece a la clase NP-completo, que son los problemas especialmente difíciles⁹.

El problema 3-SAT se define como sigue: dadas N variables booleanas (x_i), y M cláusulas

⁹ Si se encuentra un algoritmo que resuelva un problema de la clase NP-completo en tiempo polinómico, automáticamente se resolverían todos los problemas de la clase NP en tiempo polinómico y se demostraría que $P = NP$. Se asume usualmente que $P \neq NP$, aunque no ha sido aún demostrado. Otro problema interesante en este contexto de la clase NP, es la obtención del estado de mínima energía de un vidrio de espín tridimensional. Sin embargo, los problemas K-SAT con $K < 3$ pertenecen a la clase P.

compuestas por tres de las variables booleanas o sus negaciones enlazadas por dos OR, hay que encontrar el valor de las N variables booleanas que hagan satisfacer las M cláusulas. En la versión aleatoria, las tres variables booleanas que componen una cláusula se eligen aleatoriamente (usando una distribución uniforme sobre las N variables booleanas) y van a jugar el papel de los espines en un vidrio de espín (si $x_i = 1$ entonces $S_i = 1$, en caso contrario $S_i = -1$). Cada una de las tres variables booleanas de la cláusula se niegan con probabilidad $1/2$, y este hecho va a generar los acoplamientos J s aleatorios (si se niega $J = -1$, en caso contrario $J = 1$). Es posible escribir un Hamiltoniano (cuyo valor numérico es el número de cláusulas que se violan) similar a los usados en el estudio de los vidrios de espín para este problema. Como es un problema de optimización, se puede estudiar usando mecánica estadística en el límite de temperatura nula (así se minimiza la energía, que es lo que se busca, y no la energía libre).

La teoría de la complejidad estudia el peor caso. Sin embargo, en las aplicaciones es importante entender las propiedades del caso típico y esta información la proporciona el problema 3-SAT aleatorio.

El modelo 3-SAT aleatorio se resolvió analíticamente [15] en el límite de N y M muy grandes con $\alpha \equiv M/N$ fijo, encontrándose una transición de fase para $\alpha_c \sim 4.48$ entre una fase donde, con probabilidad 1 (cuando $N \rightarrow \infty$), es posible encontrar una solución donde se satisfagan todas las cláusulas ($\alpha < \alpha_c$ y denominada fase SAT) y una segunda fase donde la probabilidad de satisfacer todas las cláusulas es cero (de nuevo con $N \rightarrow \infty$, fase UNSAT): esta fase ($\alpha > \alpha_c$) está descrita por una solución del tipo 1-RSB.

3. Una breve reseña del resto de sus contribuciones

Giorgio Parisi es un científico prolífico, que ha colaborado y colabora con un gran número de investigadores y que ha producido aportaciones muy relevantes en diferentes campos de la ciencia.

Además de las aportaciones ya discutidas, se pueden citar algunas de sus contribuciones más relevantes en la física, muchas de ellas obtenidas con colaboradores.

En el contexto de la física de altas energías podemos citar la ecuación de Dokshitzer-Cribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, el cálculo de masas de hadrones en cromodinámica cuántica (QCD) incluyendo fermiones dinámicos y su importante participación en el proyecto APE¹⁰.

¹⁰ El proyecto APE (Array Processor Experiment) consistió en el diseño y construcción en Italia, bajo el liderazgo de N. Cabibbo, de superordenadores optimizados para la simulación de la QCD en el retículo. Parisi participó, además de en



Fig. 10. Parte de la colaboración hispano-italiana Janus en la cafetería de la Facultad de Ciencias Físicas de la UCM (septiembre de 2008).

En mecánica estadística introdujo el estudio de los diagramas planares, el grupo de renormalización en dimensión fija, la resonancia estocástica, multifractales y la ecuación de Kardar-Parisi-Zhang¹¹.

En el campo de los sistemas desordenados, además de lo ya reseñado sobre RSB, podemos citar la introducción de supersimetría en materia condensada mediante el mecanismo de Parisi-Sourlas, localización y su participación en el desarrollo de los ordenadores dedicados Janus (véase la próxima sección).

Y finalmente, en biología se pueden citar sus trabajos sobre inmunología, plegamiento de proteínas y la estructura de bandadas y enjambres (teórico-experimental).

4. Giorgio Parisi y España

La relación con investigadores españoles del premiado ha sido muy intensa y duradera en el tiempo. Investigadores de diferentes universidades españolas (por ejemplo, Barcelona [UB], Complutense y Zaragoza) hemos sido postdocs en su grupo, trabajando en QCD en el retículo (en el contexto del grupo APE) en los primeros tiempos (finales de los ochenta y principio de los noventa) y fundamentalmente en vidrios de espín y vidrios estructurales en los últimos 30 años. También cabe reseñar que se han codirigido con Parisi tesis doctorales, que estudiantes suyos han realizado diferentes estancias postdoctorales en universidades españolas, además de participar en diferentes

los estudios de física realizados con este superordenador, en el desarrollo del compilador.

¹¹ Podemos citar que M. Hairer recibió en la medalla Fields en 2014 por sus trabajos sobre ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, una de las cuales fue la ecuación de Kardar-Parisi-Zhang, propuesta en 1986.



Fig. 11. Giorgio Parisi con el autor de este comentario, después de su investidura como doctor *honoris causa* por la Universidad de Extremadura (abril de 2019).

proyectos de investigación, nacionales y europeos, con él.

En este contexto se puede enmarcar la colaboración Janus, formada por físicos e ingenieros de las Universidades de Ferrara, Roma La Sapienza, Complutense, Zaragoza y Extremadura (Fig. 10), cuya meta ha sido el estudio de los vidrios de espín en dimensión finita mediante simulaciones de Montecarlo, focalizando en las propiedades de la fase vidrio de espín y, en particular, si estas propiedades eran las obtenidas en dimensión infinita usando la teoría de Parisi [17]. Lo cual hizo necesario, siguiendo la senda de la colaboración APE, el desarrollo de dos superordenadores dedicados, Janus I y II, que se encuentran situados en el Instituto de Biocomputación y Física de los Sistemas Complejos (BIFI) de la universidad de Zaragoza. Estos superordenadores dedicados están basados en FPGAs y programados en lenguaje VHDL [16]. La participación de Parisi ha sido muy importante en este proyecto. Cabe reseñar que Parisi recibió el premio Microsoft en 2007 y parte del montante económico del premio lo cedió para cofinanciar el ordenador Janus II. Finalmente podemos comentar que los resultados científicos obtenidos por la colaboración Janus han sido muy importantes para establecer la relevancia de RSB en los vidrios de espín en dimensión finita [18].

Además de la relación científica que se acaba de relatar, Parisi ha apoyado diferentes iniciativas en nuestro país. Se puede citar que en el año 2001 y con motivo de la creación del BIFI, se organizó una presentación en el ICM (Madrid) con diferentes investigadores, uno de ellos Parisi, que apoyaron la creación del citado instituto. Aprovechando su visita, concedió a esta revista una interesante entrevista sobre sistemas complejos y multidisciplinariedad [19].

Finalmente cabe reseñar que el 4 de abril de 2019 fue investido doctor *honoris causa* por la Universidad de Extremadura a propuesta de su

Facultad de Ciencias, teniendo el placer de ser su padrino (Fig. 11). Fue su primer doctorado honorífico y, hasta donde conozco, el único por el momento, y le produjo especial ilusión. En su discurso de aceptación del doctorado comentó¹²:

I have to confess that there is also another reason that makes me particularly happy on this occasion. I do not have a doctorate at all; I do not have a Ph.D. At the time when I graduated there was no Ph.D. in Italy. When filling some form for scientific events where I have to write the date of my Ph.D. I have to confess the truth that I do not have a Ph.D. Of course now everything changes! Let me add that my first paper in physics was written in 1969, exactly fifty years ago. It took me fifty years of hard work to get my Ph.D., but finally, I got it and I am very proud of it!!! I am sure that this is the doctorate that went on for the longest time and I am amazed that I established this record.

5. Conclusiones

El espectro de las investigaciones científicas del Premio Nobel Giorgio Parisi es inmenso, desde las partículas elementales hasta la mecánica de fluidos, incluyendo la dinámica atmosférica. En otros campos de la ciencia podemos citar la inmunología, plegamiento de proteínas, construcción de superordenadores dedicados (APEs y Janus's), problemas de optimización, *machine learning*, estudio de bandadas de pájaros y un largo etcétera.

Su investigación es un claro ejemplo de la importancia de la investigación básica. ¿Qué importancia tecnológica tienen los vidrios de espín? Hasta donde conozco, ninguna¹³. Sin embargo, su estudio, desde los primeros experimentos, dio lugar a la aparición de la teoría de la rotura de la simetría de las réplicas, que, como se ha descrito anteriormente, ha tenido aplicaciones en campos completamente alejados de los vidrios de espín y ha proporcionado una profunda perspectiva de sistemas que actualmente se denominan “complejos”. Y también cabe reseñar que las investigaciones llevadas a cabo por el premiado muestran unas estrechas y profundas conexiones entre campos aparentemente muy alejados del conocimiento científico.

Además es interesante señalar el uso que ha hecho Parisi de las matemáticas. Los matemáticos

¹² Se puede acceder a su discurso completo en el enlace: <http://https://www.eweb.unex.es/eweb/fisteor/juan/laudatiogiorgio.pdf>.

¹³ El también Premio Nobel P. W. Anderson escribió en 1988: “The history of spin glass may be the best example I know of the dictum that a real scientific mystery is worth pursuing to the end of the Earth, for its own sake, independently of any obvious practical importance or intellectual glamour” [20].

han necesitado más de varias décadas de intenso trabajo para establecer de manera completamente rigurosa resultados por él obtenidos en diferentes campos.

Finalmente comentaremos cómo percibe Giorgio Parisi el proceso de la investigación científica. En su libro *La chiave, la luce e l'ubriaco* [21], Parisi cuenta la historia de una persona que encuentra a un borracho buscando su llave debajo de una farola. Esta persona le pregunta al borracho si es aquí donde ha perdido la llave. Este le contesta que seguramente no, pero que ¡aquí hay luz! Es decir, los científicos hacen la física que pueden hacer en cada momento: si los científicos disponen de medios que les permitan estudiar fenómenos que hasta ahora no se podían estudiar, se pondrán a ello, y ya se verán en el futuro los resultados. La meta de la ciencia es mejorar la capacidad de la humanidad para conocer y controlar los fenómenos naturales y que cualquier problema científico que es resuelto puede ayudar a comprender y resolver otros, creándose así interrelaciones inicialmente imprevistas [21].

¡Enhorabuena Giorgio!

Este comentario está dedicado a la memoria del Prof. Raffaele (Lele) Tripiccone, catedrático de Física Teórica de la Universidad de Ferrara (tercero en el lado izquierdo de la mesa de la Fig 10), que falleció durante la redacción de este comentario. Un gran científico y mejor persona, su contribución fue fundamental tanto en los diferentes proyectos APE como en el diseño de los ordenadores Janus.

Referencias

- [1] J. A. MYDOSH, *Spin Glasses: An Experimental Introduction* (CRC Press, Florida, 1993).
- [2] J. J. RUIZ-LORENZO, "Vidrios de spin: Paradigma de los sistemas complejos", *REF* **11**, 22 (1997).
- [3] M. MÉZARD, G. PARISI y M. VIRASORO, *Spin Glass Theory and Beyond, Lecture Notes in Physics, Vol. 9* (World Scientific, Singapur, 1987).
- [4] G. PARISI, "Infinite number of Order Parameters for Spin Glasses", *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1754 (1979); "A sequence of approximated solutions to the S-K model for spin glasses", *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, L115 (1980); *ibid.*, "The order parameter for spin glasses: A function in the interval 0-1", **13**, 1101 (1980); *ibid.*, "Magnetic Properties of Spin Glasses in a New Mean Field Theory", **13**, 1887 (1980).
- [5] F. GUERRA, "Broken Replica Symmetry Bounds in the Mean Field Spin Glass Model", *Commun. Math. Phys.* **233**, 1 (2003).
- [6] M. TALAGRAND, "The generalized Parisi formula", *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I* **337**, 111 (2003); *ibid.*, "On the meaning of Parisi's functional order parameter", **337**, 625 (2003); "The Parisi Formula", *Ann. Math.* **163**, 221 (2006).
- [7] D. PANCHENKO, "The Parisi ultrametricity conjecture", *Ann. Math.* **177**, 383 (2013).
- [8] L. F. CUGLIANDOLO y J. KURCHAN, "Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 173 (1993).
- [9] S. FRANZ, M. MÉZARD, G. PARISI y L. PELITI, "Measuring Equilibrium Properties in Aging Systems", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1758 (1998).
- [10] D. HÉRISSEY y M. OCIO, "Fluctuation-Dissipation Ratio of a Spin Glass in the Aging Regime", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 257202 (2002).
- [11] M. BAITY-JESI *et al.* (Col. Janus), "A statics-dynamics equivalence through the fluctuation dissipation ratio provides a window into the spin-glass phase from nonequilibrium measurements", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **114**, 1838 (2017).
- [12] N. GHOFRAHNIHA *et al.*, "Experimental evidence of replica symmetry breaking in random lasers", *Nat. Comm.* **6**, 6058 (2015).
- [13] P. CHARBONNEAU, J. KURCHAN, G. PARISI, P. URBANI y F. ZAMPONI, "Glass and jamming transitions: from exact results to finite-dimensional descriptions", *Ann. Rev. Cond. Matt. Phys.* **8**, 1 (2016).
- [14] A. P. HAMMOND y E. I. CORWIN, "Experimental observation of the marginal glass phase in a colloidal glass", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **117**, 5714 (2020).
- [15] M. MÉZARD, G. PARISI y R. ZECCHINA, "Analytic and Algorithmic Solution of the Random Satisfiability Problem", *Science* **297**, 812 (2002).
- [16] F. BELLETTI *et al.* (Col. Janus), "Simulating spin systems on IANUS, an FPGA-based computer", *Comput. Phys. Commun.* **178**, 208 (2008); M. BAITY-JESI *et al.* (Col. Janus), "Janus II: a new generation application-driven computer for spin-system simulations", *Comput. Phys. Commun.* **185**, 550 (2014).
- [17] E. MARINARI, G. PARISI, F. RICCI-TERSENGHI, J. J. RUIZ-LORENZO y F. ZULIANI, "Replica Symmetry Breaking in Short Range Spin Glasses: A Review of the Theoretical Foundations and of the Numerical Evidence", *J. Stat. Phys.* **98**, 973 (2000).
- [18] J. J. RUIZ-LORENZO, "Nature of the spin glass phase in finite dimensional (Ising) spin glasses", en Yu. Holovatch (ed.) *Order, Disorder and Criticality: Advanced Problems of Phase Transition Theory, Vol. 6*, (World Scientific, Singapur, 2020), pp 1-52.
- [19] A. SÁNCHEZ, "Entrevista con Giorgio Parisi", *REF* **15**, 2 (2001).
- [20] P. W. ANDERSON, "Spin Glass I: A Scaling Law Rescued", *Phys. Today* **41**, 526 (1988).
- [21] G. PARISI, *La chiave, la luce e l'ubriaco: Come si muove una ricerca scientifica* (Di Renzo Editore, Roma, 2006).

Juan J. Ruiz-Lorenzo
Dpto. de Física
Universidad de Extremadura

