PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001

Hoja 5

1. Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \quad x \in (0,1) \ , \quad t > 0, \\ u(x,0) = u(0,t) = 1 \ , \ u(1,t) = 0 \ . \end{cases}$$

2. Calcular la solución de

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t) \ , & x \in (0,1) \ , t \geq 0 \ , \\ u(x,0) = f(x), & \\ u_x(0,t) - au(0,t) = 0 \ , a > 0 \ , & \\ u_x(1,t) = 1. & \end{cases}$$

3. Resolver

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \ , \quad r < R \ , \\ u_r(R,\theta) = f(\theta) \ , \quad \theta \in [0, 2\pi) \ . \end{cases}$$

   Encontrar la solución cuando $f(\theta) = \sin^3 \theta$ y $R = 1$.

4. Encontrar la solución del problema

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \ , \quad r < 1 \ , \quad \theta \in (0, \pi/2) \ , \\ u_r(1,\theta) = f(\theta) \ , \\ u_\theta(r,0) = u(r,\pi/2) = 0 \ . \end{cases}$$

5. Resolver

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \ , \quad 1 < r < 2 \ , \quad \theta \in (0, \pi) \ , \\ u(1,\theta) = u(2,\theta) = u(r,0) = 0 \ , \\ u_\theta(r,\pi) = r^2 \ . \end{cases}$$

6. El flujo de un fluido incomprensible e irrotacional alrededor de un obstaculo esférico de radio a puede ser descrito matemáticamente por:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(r,\theta,\phi) = 0 \ , \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \ , \\ \psi(r,\theta,\phi) \to -v_0 z = -v_0 r \cos\theta \ \text{ cuando } \ r \to \infty \ . \end{cases}$$

   La velocidad del fluido está dada por: $\mathbf{v} = -\nabla \psi$.

   Repetir el problema si el obstaculo es un cilindro de longitud infinita.

7. Se coloca una esfera conductora (de radio a) en presencia de un campo eléctrico uniforme dirigido según el eje $0Z$: $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}$. El potencial electrostático, V, en esta situacion verifica:

$$\begin{cases} \nabla^2 V(r,\theta,\phi) = 0 \ , \\ V(a,\theta,\phi) = \text{constante} \ , \\ V(r,\theta,\phi) \to -E_0 r \cos\theta \ \text{ cuando } \ r \to \infty \ . \end{cases}$$

   Calcular como la presencia de la esfera conductora modifica el campo eléctrico inicial.

8. Resolver mediante el método de la transformada de Fourier

$$\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \ , \\ u(x,0) = f(x) \ . \end{cases}$$

9. Resolver usando la transformada de Fourier (seno)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \quad x > 0 \ , t > 0 \ , \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \\ u(0,t) = t^2 \ . \end{cases}$$

10. Resolver mediante la transformada de Fourier

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = e^{-x^2} \ . \end{cases}$$

11. Resolver usando el método de la transformada de Laplace

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \quad x \geq 0 \ , t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \\ u(0,t) = 1 \ . \end{cases}$$