PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001

Hoja 4

1. Sea el conjunto de polinomios $U_n(x)$ definidos por la función generatriz

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n .$$

   (a) Establecer la relación de recurrencia pura que relaciona U_{n+1},U_n y U_{n-1} .

   (b) Mostrar que $U_0(x) = 1$ y, mediante la fórmula de recurrencia, escribir los seis primeros polinomios ($n \leq 5$).

   (c) Calcular $U_n(1)$, $U_n(-1)$ y $U_n(0)$.

2. Demostrar que las derivadas $P'_\ell(x)$ de los polinomios de Legendre forman un conjunto completo en el intervalo $[-1,1]$. Escribir la relación de ortogonalidad.

3. Utilizando la función generatriz de los polinomios de Legendre, demostrar que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1}}{\ell+1} P_\ell(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \, .$$

4. Hallar la integral $\int_0^1 dx\ P_\ell(x)$, (a) utilizando la función generatriz, (b) aplicando la relación de recurrencia (que previamente se deducirá) $\ell P_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) - xP'_\ell(x) = 0$, y (c) aplicando la relación de recurrencia (que previamente se deducirá) $P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) = (2\ell+1)P_\ell(x)$.

5. (a) Hallar la integral $\int_0^1 dx\ x\, P_\ell(x)$ partiendo de la fórmula de recurrencia pura. (b) Hallar el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de $f(x) = |x|$.

6. Demostrar las siguientes relaciones de las funciones asociadas de Legendre:

   (a) $P^1_{2\ell}(0) = 0, \quad P^1_{2\ell+1}(0) = (-1)^{\ell+1}(2\ell+2)(2\ell+2)!/2^{2\ell+2}[(\ell+1)!]^2$;

   (b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} P^m_\ell(x) P^n_\ell(x) = \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!}\delta_{nm}$.

7. A partir de la transformada de Fourier de los polinomios de Hermite obtener una representación integral de los mismos.

8. (a) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} x^2 H_n(x) H_m(x)$.

   (b) A partir del resultado anterior, calcular la suma $\sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} x^2 H_1(x) H_m(x)$.

9. En espectroscopía molecular suelen aparecer con frecuencia integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} x^r H_n(x) H_{n+p}(x)$$

   con n, p, r enteros no negativos y $p \geq r$. Evaluar dicha integral.

10. (a) Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} x H'_n(x) H'_m(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)! \delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n! \delta_{n,m+1} \, ,$$

   donde $H'_n(x) = dH_n(x)/dx$.

(b) A partir del resultado anterior, demuestra que

$$\sum_{p=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} x H_n'(x) H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi}2^{n+1} n(n+1)!\;.$$

11. Evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} dx\, x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x)\;.$$

12. Hallar la transformada de Laplace de los polinomios de Laguerre.

13. La parte radial normalizada de la función de onda del átomo de hidrógeno viene dada por

$$R_{n\ell}(r) = \left[\alpha^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}\right]^{1/2} e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\alpha r)\;,$$

donde α es una constante. Calcular la distancia media del electrón respecto del núcleo: $\langle r\rangle = \int_0^{\infty} dr\, r^3 \left[R_{n\ell}(\alpha r)\right]^2$.

14. Desarrollar en serie de polinomios de Laguerre la función $f(x) = \theta(x-a)$, siendo $\theta(x)$ la función de Heaviside.

15. Teniendo en cuenta el desarrollo de Fourier de $\exp(ix\sin\varphi)$, hallar una representación integral de las funciones de Bessel de orden entero.

16. Consideremos la representación en serie de funciones de Bessel de la función

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(\alpha_{nm} x)\;,$$

donde α_{nm} es la raiz m-ésima de $J_n(x)$.

(a) Probar la relación de Parseval

$$\int_0^1 dx\, x[f(x)]^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \left[J_{n+1}(\alpha_{nm})\right]^2\;.$$

(b) Escogiendo $f(x) = x^n$, probar que las raices α_{nm} verifican la relación

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{nm}^2} = \frac{1}{4(n+1)}.$$

17. Calcular la transformada de Laplace de $J_0(ax)$, donde $-\infty < a < \infty$.

18. La función beta incompleta puede definirse por la representación integral

$$B_x(a,b) = \int_0^x dt\, t^{a-1}(1-t)^{b-1}.$$

Demostrar que esta función es un caso particular de la función hipergeométrica.

19. Hallar la transformada de Laplace de la función hipergeométrica confluente.