PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001

Hoja 3

1. Resolver en sentido de distribuciones la ecuación $xu(x) = 0$.

2. Calcular en sentido de distribuciones: a) $\frac{d}{dx}[\theta(x)\cos x]$ y b) $\frac{d^3}{dx^3}[\theta(x)x^2]$, donde $\theta(x)$ es la función paso.

3. Calcular $\langle \delta'', e^{-x^4}\cos x\rangle$.

4. Calcular la serie de Fourier de la función x^2 en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Estudiar la convergencia puntual y uniforme. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

5. Calcular la serie de Fourier en senos de $\cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Estudiar la convergencia puntual y uniforme.

6. Hallar los autovalores y las autofunciones del problema de S-L asociado a la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ con $\lambda \geq 0$, en el intervalo $[a, b]$ con las condiciones de contorno $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$, $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$.

7. Hallar los autovalores y las autofunciones del siguiente problema de S-L:

$$y'' = -k^2[1 + a\delta(x)]y, \quad a = \text{cte.}, \quad -L \leq x \leq L, \quad y(-L) = y(L) = 0$$

8. (a) Hallar la ecuación transcendente que determina los autovalores λ_n y las autofunciones $\psi_n(x)$ de la ecuación diferencial $\psi_n''(x) = -\lambda_n \psi_n(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq a$ con las condiciones de contorno $\psi_n(0) + a\psi_n'(0) = 0$, $\psi_n(a) - a\psi_n'(a) = 0$.

   (b) Existe, en general, solución del problema inhomogéneo

$$y'' + (\pi/a)^2 y = f(x), \;\; y(0) + ay'(0) = y(a) - ay'(a) = 0\ ?$$

   En caso afirmativo, hallar la función de Green correspondiente.

9. Encontrar la función de Green correspondiente al problema

$$xy'' + y' - \frac{4}{x}y = f(x), \quad x \geq 1, \quad y(1) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) < \infty.$$

   Obtener $y(x)$ si $f(x) = 1/x$.

10. Encontrar la función de Green del problema

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-kx}y'(x)\right] = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 \leq x, \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) < \infty.$$

    Obtener $y(x)$ si $f(x) = e^{-x}$.

11. Encontrar la función de Green asociada al problema $y'' - k^2 y = f(x)$, $k^2 > 0$, con las condiciones de contorno $y(\pm\infty) < \infty$.

12. Obtener en forma cerrada la función de Green para el problema inhomogéneo $y'' - k^2 y = f(x)$ $0 \leq x < \infty$ con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\infty) < \infty$. (a) Si $k \neq 0$. (b) Si $k = 0$. En ambos casos hallar $y(x)$ si $f(x) = e^{-x}$.

13. Hallar la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + k^2[1 + a\delta(x)]y = F_0, \quad -L \leq x \leq L, \quad a, F_0 = \text{ctes} ,$$

sujeta a las condiciones de contorno $y(-L) = y(L) = 0$, expresándola como suma sobre funciones de un conjunto completo.

14. Considerar el problema no homogéneo $y'' = f(x)$, $0 \leq x \leq L$, $y(0) = y'(L) = 0$.
    (a) Encontrar las autofunciones normalizadas del operador d^2/dx^2 para las condiciones de contorno dadas.
    (b) Escribir la función de Green $G(x, x')$ mediante desarrollo en serie.
    (c) Obtener $G(x, x')$ en forma cerrada.
    (d) Encontrar la solución del problema para el caso particular $f(x) = x^2$ y $L = 1$.

15. Sea el problema no homogéneo $y''+y = \sin x$ con las condiciones de contorno $y(0) = y'(2\pi) = 0$. (a) Hallar la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes. (b) Obtener la función de Green en forma cerrada. (c) A partir de ella, resolver el problema no homogéneo. (d) Halla la solución para las condiciones de contorno *no* homogéneas $y(0) = 2$, $y'(2\pi) = 0$.

16. Dado el problema no homogéneo

$$y'' - k^2 y = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad y(0) = y(L) = 0,$$

hallar la función de Green (a) como un desarrollo en serie y (b) en forma cerrada. Comprobar la equivalencia entre ambas expresiones.

17. (a) Resolver el problema de autovalores $y'' = -\lambda y$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$.
    (b) Encontrar la función de Green del problema $y'' = f(x)$ con idénticas condiciones de contorno mediante desarrollo en serie y también en forma cerrada.

18. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de autofunciones.

19. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \leq x, \quad y(1) = 0, \quad y(\infty) < \infty$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma cerrada.