# PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001

**Hoja 1**

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:
   - $3x^2 u_y + u_x = x$, $u(x,0) = x^3$.
   - $y u_y + (2y - x) u_x = x$, $u(x,1) = 0$.
   - $x u_y - y u_x = 2xyu$, $u(x,0) = x$.

2. Sea $t^2 u_t + u_x = 2xu$. Encontrar la solución que cumple $u(x,1) = f(x)$, estudiando su unicidad. En particular si:
$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & \text{si } x \in [0,\pi]\,, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [0,\pi]\,, \end{cases}$$
hallar $u(3/2,1)$. Plantear un problema de Cauchy que tenga infinitas soluciones.

3. Reducir a la forma canónica y (si es posible) encontrar la solución de las siguientes EDPs:
   - $t^2 u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0$ .
   - $u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0$ .
   - $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x$ .
   - $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u$ .
   - $u_{xx} - 3y u_x + 2y^2 u = y$ .
   - $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y = 9u$ .

4. Sea $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$. Encontrar la forma canónica y la solución general. Estudiar la ecuación anterior con los siguientes datos de Cauchy:
   - $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.
   - $u(0,t) = u_x(0,t) = t$.

5. Sea $u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} = 2t^{-2}u$. Calcular la solución que satisface: $u(x,1) = 0$, $u_t(x,1) = g(x)$. En el caso particular:
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin^4(\pi x) & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$
hallar y dibujar $u(x,2)$.

6. Escribir $4y u_{yy} - u_{xx} + 2u_y = 0$ en la forma canónica. Resolverla con los datos iniciales: $u(x,1) = 2x$ y $u_y(x,1) = x$.

7. Estudiar la unicidad de
$$\begin{cases} \nabla^2 u - k^2 u = F & \text{en } \mathcal{D}\,, \\ u = f & \text{en } \partial\mathcal{D}\,. \end{cases}$$

8. Estudiar la unicidad del siguiente problema de la ecuación del calor
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t) & x \in (0,L), t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & \\ u_x(0,t) + a u(0,t) = 0, & \\ u_x(L,t) + b u(L,t) = 0. & \end{cases}$$