MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2001/2002.
Examen Final. Convocatoria de Septiembre.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u_t + u_x \ , & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = x \ , \quad u_t(x,0) = 0 \ . \end{cases}$$

Resolverlo mediante el método de las características. (2.5 puntos)

Problema 2.

- Calcular la integral

$$I_n(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 e^{-\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x)^2 \ ,$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite, n es un número natural y α es un número real. (2.5 puntos)

Problema 3.

- Resolver el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} ty''(t) + 2y'(t) + \lambda t y(t) = 0 \ , \\ y(0) < \infty \ , \ y(1) = 0 \ . \end{cases}$$

Ayuda: Realizar el cambio de variables $z = ty$.

(2.5 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables la siguiente ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = 0 \ , \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \ , \\ u(x,0) = \sin(3\pi x) \ , \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \ . \end{cases}$$

(2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Hermite:

$$G(x,t) = \exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ .$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \ .$$

$$||H_n(x)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \ .$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) \ .$$