MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001.
Examen Final. Convocatoria de Septiembre. 3/8/2001.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Encontrar la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \ , \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,x) = x^2 \ , \ \ u_t(x,x) = 0 \ . \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Problema 2.

- Calcular la integral

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite.

(2.5 puntos)

Problema 3.

- Calcular para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ la solución (si la hay) de

$$\begin{cases} t^2 y'' - t y' + \lambda y = t^3 \ , \\ y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0 \ , \end{cases}$$

haciendo uso de la función de Green (construida de manera explícita) en el caso de que exista.

(2.5 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables la siguiente ecuación de Laplace en dos dimensiones.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = \cos(\theta) \ , \quad 1 < r < 2 \ , \\ u_r(1,\theta) = 0 \ , \ \ u_r(2,\theta) = \cos(2\theta) \ . \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Hermite:

- Función generatriz:

$$G(x,t) = \exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ .$$

- Relaciones de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \ .$$

- Normalización:

$$||H_n(x)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \ .$$

El laplaciano en coordenadas polares es:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \ .$$