MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2002/2003.
Examen Final. Convocatoria de Junio.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Clasificar y reducir a la forma canónica la siguiente ecuación

$$u_{tt} + 4u_{tx} - 5u_{xx} + 6u_t + 3u_x = u$$

(2.5 puntos)

Problema 2.

- Calcular

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2/7} H_n(x) ,$$

donde $H_m(x)$ son los polinomios de Hermite. (2.5 puntos)

Problema 3.

- Sea el problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = 1 , \quad y'(0) = 0 , \ y(1) = 0 .$$

(a) Hallar la función de Green en forma cerrada.
(b) A partir de la función de Green obtener la solución del problema no homogéneo.
(2.5 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 7\sin(\pi x/2) , \quad x \in (0,1) , \quad t > 0 , \\ u(x,0) = 0 , \quad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 , \quad u_x(1,t) = 0 . \end{cases}$$

(2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Hermite:

$$G(x,t) = \exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n .$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) .$$

$$||H_n(x)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} .$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) .$$