MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2001/2002.
Examen Final. Convocatoria de Junio.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \ , \\ u(x,1) = 0 \ , \quad u_t(x,1) = x^2 \ . \end{cases}$$

Resolverlo mediante el método de las características. (2.5 puntos)

Problema 2.

- Sea la integral

$$I_{nm} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-x^2} H_n(x) \frac{dH_m(x)}{dx} \ ,$$

donde $H_m(x)$ son los polinomios de Hermite. Calcular I_{nm}. (2.5 puntos)

Problema 3.

- Sea el problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + y(x) = \cos(x) \ , \quad y'(0) = 0 \ , \ y(2\pi) = 0 \ .$$

(a) Hallar la función de Green en forma cerrada.
(b) A partir de la función de Green obtener la solución del problema no homogéneo.
(2.5 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , \quad x \in (0,1) \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = \sin(\pi x)\cos(\pi x) \ , \\ u(0,t) = 0 \ , \quad u(1,t) = 0 \ . \end{cases}$$

(2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Hermite:

$$G(x,t) = \exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ .$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \ .$$

$$||H_n(x)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \ .$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) \ .$$