MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001.
Examen Final. Convocatoria de Junio. 28/6/2001.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Encontrar la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u_t + u_x \ , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = x \ , \ \ u_t(x,0) = 0 \ . \end{cases}$$

(3 puntos)

Problema 2.

- Calcular la integral

$$I_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ x \ e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite.

(1 punto)

Problema 3.

- Resolver mediante el método de la función de Green (construida de manera explícita) el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = f(x) \ , \\ y(0) - y'(0) = y(1) = 0 \ . \end{cases}$$

(3 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(9x) \ , \quad x \in [0, \pi/2] \ , \quad t > 0 \ , \\ u(x,0) = 0 \ , \ \ u_t(x,0) = 0 \ , \\ u(0,t) = 0 \ , \ \ u_x(\pi/2, t) = 0 \ . \end{cases}$$

(3 puntos)

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Hermite:

- Función generatriz:

$$G(x,t) = \exp(2tx - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ .$$

- Relaciones de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \ .$$

- Normalización:

$$||H_n(x)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \ .$$