

MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2001/2002.

Examen Final. Convocatoria de Febrero.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} - 9u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & u_t(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Resolverlo mediante el método de las características. (2 puntos)

Particularizar la solución al caso $f(x) = 1$ y $g(x) = x$. (0.5 puntos)

Problema 2.

- Sea la integral

$$I_{\ell'\ell} \equiv \int_{-1}^1 dx x P_{\ell'}(x) P_{\ell}(x),$$

donde $P_{\ell}(x)$ son los polinomios de Legendre.

1. Calcular $I_{\ell'\ell}$. (1.5 puntos)
2. Sea

$$S_{\ell} \equiv \sum_{\ell'=0}^{\infty} I_{\ell'\ell}.$$

Calcular S_{ℓ} (1 punto).

Problema 3.

- Resolver mediante el método de la función de Green (construida de manera explícita)

$$\begin{cases} y'' - y = x, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(x), & x \in [0, \pi], t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2x), & u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

(2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre:

- Función generatriz:

$$G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}.$$

- Relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} P'_{\ell+1}(x) - xP'_{\ell}(x) - (\ell+1)P_{\ell}(x) &= 0, \\ (\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_{\ell}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) &= 0, \\ xP'_{\ell}(x) - P'_{\ell-1}(x) - \ell P_{\ell}(x) &= 0. \end{aligned}$$

- Normalización: $\|P_{\ell}(x)\|^2 = \int_{-1}^1 dx P_{\ell}(x)^2 = \frac{2}{2\ell+1}$.