MÉTODOS MATEMÁTICOS IV. Curso 2000/2001.
Examen Final. Convocatoria de Febrero. 7/2/2001.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \,, \\ u(x,0) = 0 \,, \quad u_t(x,0) = g(x) \,. \end{cases}$$

  Resolverlo mediante el método de las características o mediante el método de la transformada de Fourier. (2.5 puntos) **Nota**: Solo hay que resolverlo por alguno de los dos métodos.

Problema 2.

- Sea la integral

$$I_{\ell'\ell} \equiv \int_{-1}^{1} dx\, x^2 P_{\ell'}(x) P_\ell(x) \,,$$

  donde $P_\ell(x)$ son los polinomios de Legendre.

  1. Calcular $I_{\ell'\ell}$. (1.5 puntos)
  2. Sea

$$S_\ell \equiv \sum_{\ell'=0}^{\infty} I_{\ell'\ell} \,.$$

     Calcular S_0 (0.5 puntos) y S_2 (0.5 puntos).

Problema 3.

- Resolver mediante el método de la función de Green (construida de manera explícita)

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \,, \\ y(-\pi/4) = y(\pi/4) = 0 \,. \qquad \text{(1.5 puntos)} \end{cases}$$

  Si $f(x) = 1$ encontrar la solución usando la función de Green previamente construida (1 punto).

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(3x) - \sin(9x) \,, \quad x \in [0,\pi] \,, \quad t > 0 \,, \\ u(x,0) = x \,, \quad u_t(x,0) = 0 \,, \\ u(0,t) = 0 \,, \quad u(\pi,t) = 0 \,. \end{cases}$$

  (2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre:

- Función generatriz:

$$G(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \,.$$

- Relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} P'_{\ell+1}(x) - xP'_\ell(x) - (\ell+1)P_\ell(x) &= 0 \,, \\ (\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) &= 0 \,, \\ xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) - \ell P_\ell(x) &= 0 \,. \end{aligned}$$

- Normalización: $||P_\ell(x)||^2 = \int_{-1}^{1} dx\; P_\ell(x)^2 = \frac{2}{2\ell+1}$.