MÉTODOS MATEMÁTICOS IV.
Examen Final. Convocatoria de Febrero 2003.

El examen consta de 4 problemas. Solo se podrán usar un formulario (tamaño din a4 por una sola cara) y un libro de tablas. Se justificarán adecuadamente todos los pasos intermedios en la resolución de los problemas.

Problema 1.

- Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{tx} = 4 \ , \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0 \ , \ \ u_x(0,t) = 0 \ . \end{cases}$$

Resolverlo mediante el método de las características. (2.5 puntos)

Problema 2.

- Calcular la integral

$$I \equiv \int_0^\infty dx\, x^{\alpha+2} e^{-x} \left(L_n^\alpha(x)\right)^2 \ ,$$

donde $L_n^\alpha(x)$ son los polinomios de Laguerre asociados. (2.5 puntos)

Problema 3.

- Resolver el siguiente problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = f(x) \ , \\ y(1) = 0 \ , \ y(\infty) < \infty \ . \end{cases}$$

mediante el método de la función de Green calculada de manera explícita. Particularizar el resultado a $f(x) = 1/x$.

(2.5 puntos)

Problema 4.

- Resolver mediante el método de separación de variables la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \ , \quad x \in (0,1) \ , \ \ t \in \mathbb{R} \ , \\ u(x,0) = \sin(4\pi x) \ , \\ u(0,t) = u(1,t) = u_t(x,0) = 0 \ . \end{cases}$$

(2.5 puntos).

Ayuda:

Algunas propiedades de los polinomios de Laguerre asociados:

$$G_\alpha(x,t) = \frac{\exp(-xt/(1-t))}{(1-t)^{\alpha+1}} \ .$$

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha \ .$$

$$||L_n^\alpha(x)||^2 = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \ .$$