

Problemas adicionales. Gravitación y Cosmología. Curso 2025/2026

1. (a) Verifica que la métrica de un espacio-tiempo plano con coordenadas (t, x, y, z) que está rotando con velocidad angular Ω alrededor del eje z de un sistema inercial puede escribirse como:

$$ds^2 = -[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ayuda. Pasa a coordenadas esféricas y usa $\phi \rightarrow \phi - \Omega t$.

- (b) Calcula las geodésicas para x , y y z en el sistema de referencia rotatorio.
(c) Demuestran que las geodésicas calculadas, en el límite Newtoniano, son las ecuaciones de la mecánica Newtoniana escritas en un sistema de referencia rotatorio e identifica los diferentes términos.
2. Considera el siguiente espacio-tiempo bidimensional:

$$ds^2 = -e^{-f(x)}dt^2 + e^{h(x)}dx^2.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel. Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.
- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$.
- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{e_{\hat{t}}, e_{\hat{x}}\}$ en función de la base coordenada $\{e_t, e_x\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{tt} , R^{tx} , $R_{\hat{t}\hat{x}}$, $R_{\hat{x}\hat{x}}$ y $R_{\hat{t}\hat{t}}$.
- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.
- Asumiendo que $f(x) = h(x)$, calcula $h(x)$ para que este espacio-tiempo sea plano.

Ayuda: En Sage, una función genérica, por ejemplo $f(x)$, se define mediante el comando `function('f')(x)`.

3. Considera la siguiente métrica bidimensional

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + r^2)^2},$$

donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel asociados (método Lagrangiano).
- Calcula el tensor de Ricci y la curvatura escalar R .
- Calcular explícitamente un vector de Killing y comprobar que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.
- ¿Es plano este espacio? Justificar la respuesta.

4. Considera la siguiente métrica

$$ds^2 = -d\tau^2 = du^2 - u^2 dv^2.$$

Calcula:

- Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas: $u(\tau)$ y $v(\tau)$.
- Los símbolos de Christoffel (método Lagrangiano).
- La ecuación diferencial de la geodésica $u(v)$.
- ¿Es plano este espacio?
- Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
- Demostrar que el vector de Killing calculado en el apartado anterior satisface las ecuaciones:

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0.$$

5. Calcula el módulo de la cuadiaceleración (\mathbf{a}) de un observador estático (r, θ y ϕ constantes) en la siguiente métrica

$$ds^2 = -d\tau^2 = -f(r)dt^2 + 2dtdr + r^2d\Omega_2^2,$$

where $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Nota: La cuadiaceleración está definida como $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ donde \mathbf{u} es la cuadrivelocidad del observador estático.

6. Consideremos una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -f_1(r)dt^2 + f_2(r)dr^2 + r^2d\Omega_2^2,$$

donde

$$d\Omega_2^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

En estas coordenadas el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu},$$

con $u_\mu = (-\sqrt{f_1(r)}, 0, 0, 0)$ y p y ρ escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas.

- Imponiendo que $T^{\mu\nu}$ es conservado, encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen ρ y p .
- ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

Nota: Las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ no son las de la solución de Schwarzschild ya que no estamos en el vacío (hay un tensor $T^{\mu\nu}$).

7. Considera el espacio de de Sitter en coordenadas estáticas:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} + r^2d\Omega_2^2.$$

con $\Lambda > 0$.

- Calcula el tensor de energía-momento correspondiente si la métrica anterior satisface la ecuación de Einstein con constante cosmológica (Λ).
- Caracteriza el horizonte de sucesos. Asume para ello que la coordenada r es constante en el horizonte.
- Calcula la gravedad superficial en el horizonte.
- Usando análisis dimensional, estima la temperatura del horizonte (conocida como temperatura de Gibbons-Hawking).

8. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y el tensor de energía-momento producido por un campo electromagnético. Describe el campo gravitatorio de una estrella cargada con simetría esférica o un agujero negro estático cargado. En unidades adecuadas los parámetros M y Q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella o agujero negro. En lo que sigue supondremos que $M^2 > Q^2$ ¿Por qué?

- Demuéstrase que una partícula masiva sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con lo que sucede en la métrica de Schwarzschild.

- Determinése la coordenada radial, r_{\min} de máximo acercamiento para una partícula masiva sin carga que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\min} < r_-$, donde r_- es la menor raíz de la ecuación:

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0.$$

9. Considera un agujero negro de tipo Schwarzschild.

- Demostrar que la luz puede seguir una órbita circular con coordenada radial $r = 3M$.
- Discutir cualitativamente la estabilidad de esta órbita.
- Calcular el periodo de esta órbita en tiempo coordenado.
- Calcular el periodo que mediría un observador situado en el infinito.
- Si hay un observador que está situado en un punto *fijo* de la órbita $r = 3M$, ¿qué periodo observaría?
- Si la masa del agujero negro es la masa del Sol ($M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg), expresar en metros el radio $r = 3M$.

10. La métrica de un agujero negro de Reissner-Nordstrøm con masa M y carga Q es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

- Calcula los dos horizontes que presenta este espacio-tiempo. ¿Cuál es el mayor valor del cociente $|Q|/M$ para el cual este horizonte existe? Un agujero negro que satura este límite se denomina *extremal*.
- Demuestra que la órbita estable circular de menor radio (ISCO) de un agujero negro extremal de Reissner-Nordstrøm es $r = 4M$.

11. Considera un modelo cosmológico homogéneo e isótropo descrito por

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{t}{t_*} \right)^2 [dx^2 + dy^2 + dz^2],$$

donde t_* es una constante.

- ¿Es un universo abierto, cerrado o plano?
- ¿Es un universo dominado por la materia? Justificar la respuesta..
- Asumiendo las ecuaciones de Friedmann, calcular $\rho(t)$.

12. Construye los tres espacios maximalmente simétricos en 1+3 dimensiones.

Ayuda: Necesitas construir los espacios de Minkowski, de Sitter y anti-de Sitter.

13. Encuentra una integral, función de H_0 y las Ω 's, para calcular la distancia propia al horizonte visible. ¿Cuál sería esta distancia hoy, en años-luz? Usar: $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_{\Lambda} = 0.69$ and $\Omega_R = 0$.

Ayuda: Evalúa numéricamente la integral.

14. Asumiendo que $K = 0$, demuestra:

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z} \left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho} \right).$$

15. Considera un universo con $h = 0.7$, $\Omega_{\Lambda} = 0.55$, $\Omega_M = 0.45$ y $\Omega_R = 0$.

- Calcula la edad del universo.
- Calcula su curvatura.
- Calcula $m - M$ y la distancia luminosidad (d_L) de una estrella con $z = 4$? ¿Hace cuánto tiempo se emitió la luz?