Problemas adicionales. Gravitación y Cosmología. Curso 2024/2025

1. Considera el siguiente espacio-tiempo bidimensional:

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{-f(x)}\mathrm{d}t^2 + e^{h(x)}\mathrm{d}x^2\,.$$

   - Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel.
     Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.
   - Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$.
   - Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{\boldsymbol{e}_{\hat{t}}, \boldsymbol{e}_{\hat{x}}\}$ en función de la base coordenada $\{\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_x\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{tt}, R^{tx}, $R_{\hat{t}\hat{x}}$, $R_{\hat{x}\hat{x}}$ y $R_{\hat{t}\hat{t}}$.
   - ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.
   - Asumiendo que $f(x) = h(x)$, calcula $h(x)$ para que este espacio-tiempo sea plano.

   Ayuda: En Sage, una función genérica, por ejemplo $f(x)$, se define mediante el comando `function('f')(x)`.

2. Considera la siguiente métrica bidimensional

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}{(1+r^2)^2}\,,$$

   donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

   - Calcula las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel asociados (método Lagrangiano).
   - Calcula el tensor de Ricci y la curvarura escalar R.
   - Calcular explícitamente un vector de Killing y comprobar que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.
   - ¿Es plano este espacio? Justificar la respuesta.

3. Calcula el módulo de la cuadriaceleración ($\boldsymbol{a}$) de un observador estático (r, θ y ϕ constantes) en la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$

   where $\mathrm{d}\Omega_2^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2$.

   Nota: La cuadriaceleración está definida como $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ donde $\boldsymbol{u}$ es la cuadrivelocidad del observador estático.

4. Considera la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}u^2 - u^2\mathrm{d}v^2\,.$$

   Calcula:

   - Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas: $u(\tau)$ y $v(\tau)$.
   - Los símbolos de Christoffel (método Lagrangiano).
   - La ecuación diferencial de la geodésica $u(v)$.
   - ¿Es plano este espacio?
   - Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
   - Demostrar que el vector de Killing calculado en el apartado anterior satisface las ecuaciones:

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0\,.$$

5. (a) Verifica que la métrica de un espacio-tiempo plano con coordenadas (t, x, y, z) que está rotando con velocidad angular Ω alrededor del eje z de un sistema inercial puede escribirse como:

$$ds^2 = -[1 - \Omega^2(x^2+y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$

   Ayuda. Pasa a coordenadas esféricas y usa $\phi \to \phi - \Omega t$.

(b) Calcula las geodésicas para x, y y z en el sistema de referencia rotatorio.

(c) Demuestrar que las geoésicas calculadas, en el límite Newtoniano, son las ecuaciones de la mecánica Newtoniana escritas en un sistema de referencia rotatorio e identifica los diferentes términos.

6. Considera el espacio de de Sitter en coordenadas estáticas:

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\Big)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} + r^2 \mathrm{d}\Omega_2^2 \,.$$

con $\Lambda > 0$.

- Calcula el tensor de energía-momento correspondiente si la métrica anterior satisface la ecuación de Einstein con constante cosmológica (Λ).
- Caracteriza el horizonte de sucesos. Asume para ello que la coordenada r es constante en el horizonte.
- Calcula la gravedad superficial en el horizonte.
- Usando análisis dimensional, estima la temperatura del horizonte (conocida como temperatura de Gibbons-Hawking).

7. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \,,$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y el tensor de energía-momento producido por un campo electromagnético. Describe el campo graviatatorio de una estrella cargada con simetría esférica o un agujero negro estático cargado. En unidades adecuadas los parámetros M y Q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella o agujero negro. En lo que sigue supondremos que $M^2 > Q^2$ ¿Por qué?

- Demuéstrese que una partícula masiva sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con lo que sucede en la métrica de Schwarzschild.
- Determínese la coordenada radial, $r_{\min}$ de máximo acercamiento para una partícula masiva sin carga que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\min} < r_-$, donde r_- es la menor raiz de la ecuación:

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \,.$$

8. Considera un agujero negro de tipo Schwarzschild.

- Demostrar que la luz puede seguir una órbita circular con coordenada radial $r = 3M$.
- Discutir cualitativamente la estabilidad de esta órbita.
- Calcular el periodo de esta órbita en tiempo coordenado.
- Calcular el periodo que mediría un observador situado en el infinito.
- Si hay un observador que está situado en un punto *fijo* de la órbita $r = 3M$, ¿qué periodo observaría?
- Si la masa del agujero negro es la masa del Sol ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg), expresar en metros el radio $r = 3M$.

9. La métrica de un agujero negro de Reissner-Nordstrøm con masa M y carga Q es

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad ,$$

- Calcula los dos horizontes que presenta este espacio-tiempo. ¿Cuál es el mayor valor del cociente $|Q|/M$ para el cual este horizonte existe? Un agujero negro que satura este límite se denomina *extremal*.

- Demuestra que la órbita estable circular de menor radio (ISCO) de un aguj ero extremal de Reissner-Nordstrøm es $r = 4M$.

10. Consideremos una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe como:

$$\mathrm{d}s^2 = -f_1(r)\mathrm{d}t^2 + f_2(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2 \,,$$

donde

$$\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \,,$$

$$-\infty < t < \infty, \qquad 0 \leq r < \infty, \qquad 0 \leq \theta < \pi, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \,.$$

En estas coordenadas el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \,,$$

con $u_\mu = (-\sqrt{f_1(r)}, 0, 0, 0)$ y p y ρ escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas.

- Imponiendo que $T^{\mu\nu}$ es conservado, encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen ρ y p.
- ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

Nota: Las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ no son las de la solución de Schwarzschild ya que no estamos en el vacío (hay un tensor $T^{\mu\nu}$).

11. Considera un modelo cosmológico homogéneo e isótropo descrito por

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \left(\frac{t}{t_*}\right)^2 \left[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right] \,,$$

donde t_* es una constante.

(a) ¿Es un universo abierto, cerrrado o plano?

(b) ¿Es un universo dominado por la materia? Justificar la respuesta..

(c) Asumiendo las ecuaciones de Friedmann, calcular $\rho(t)$.

12. Construye los tres espacios maximalmente simétricos en 1+3 dimensiones.

Ayuda: Necesitas construir los espacios de Minkowski, de Sitter y anti-de Sitter.

13. Encuentra una integral, función de H_0 y las Ω's, para calcular la distancia propia al horizonte visible. ¿Cuál sería esta distancia hoy, en años-luz? Usar: $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ and $\Omega_R = 0$.

Ayuda: Evalúa numéricamente la integral.

14. Asumiendo que $K = 0$, demuestra:

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z}\left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right) \,.$$

15. Considera un universo con $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.55$, $\Omega_M = 0.45$ y $\Omega_R = 0$.

- Calcula la edad del universo.
- Calcula su curvatura.
- Calcula $m - M$ y la distancia luminosidad (d_L) de una estrella con $z = 4$? ¿Hace cuánto tiempo se emitió la luz?