Problemas adicionales. Gravitación y Cosmología. Curso 2023/2024

1. Un vector de Killing ξ satisface $\mathcal{L}_\xi \boldsymbol{g} = 0$, donde $\mathcal{L}_\xi$ es la derivada de Lie en la dirección del vector ξ y $\boldsymbol{g}$ es la métrica. Demuestra
$$\xi_{(\alpha;\beta)} \equiv \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0\,.$$

2. Considera la siguiente métrica bidimensional
$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}{(1+r^2)^2}\,,$$
donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.
   - Calcula las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel asociados (método Lagrangiano).
   - Calcula el tensor de Ricci y la curvarura escalar R.
   - Calcular explícitamente un vector de Killing y comprobar que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.
   - ¿Es plano este espacio? Justificar la respuesta.

3. Calcula el módulo de la cuadriaceleración ($\boldsymbol{a}$) de un observador estático (r, θ y ϕ constantes) en la siguiente métrica
$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + 2\mathrm{d}t\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$
where $\mathrm{d}\Omega_2^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\;\mathrm{d}\phi^2$.
Nota: La cuadriaceleración está definida como $\boldsymbol{a} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ donde $\boldsymbol{u}$ es la cuadrivelocidad del observador estático.

4. Demuestra
$$V_{\alpha;\nu\kappa} - V_{\alpha;\kappa\nu} = V_\sigma R^\sigma{}_{\alpha\nu\kappa}\,.$$

5. Demuestra
$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}V^\mu)\,,$$
donde $g \equiv -\det(g_{\mu\nu})$.

6. Considera la siguiente métrica
$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}u^2 - u^2\mathrm{d}v^2\,.$$
Calcula:
   - Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas: $u(\tau)$ y $v(\tau)$.
   - Los símbolos de Christoffel (método Lagrangiano).
   - La ecuación diferencial de la geodésica $u(v)$.
   - ¿Es plano este espacio?
   - Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
   - Demostrar que el vector de Killing calculado en el apartado anterior satisface las ecuaciones:
$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0\,.$$

7. (a) Verifica que la métrica de un espacio-tiempo plano con coordenadas (t, x, y, z) que está rotando con velocidad angular Ω alrededor del eje z de un sistema inercial puede escribirse como:
$$ds^2 = -[1-\Omega^2(x^2+y^2)]dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$
Ayuda. Pasa a coordenadas esféricas y usa $\phi \to \phi - \Omega t$.
   (b) Calcula las geodésicas para x, y y z en el sistema de referencia rotatorio.

(c) Demuestrar que las geoésicas calculadas, en el límite Newtoniano, son las ecuaciones de la mecánica Newtoniana escritas en un sistema de referencia rotatorio e identifica los diferentes términos.

8. Consideremos sobre la 2-esfera el vector $\boldsymbol{A}$ que es igual a $\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$ en el punto ($\theta = \theta_0$, $\phi = 0$). ¿Cuál es el valor del vector $\boldsymbol{A}$ después de que haya sido transportado (mediante transporte paralelo) a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$? ¿Cuál es su módulo después del transporte paralelo?

9. Considerar la siguiente métrica (estática y con simetría esférica)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 = -f_1(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f_1(r)}\mathrm{d}r^2 + f_2^2(r)\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$

con $\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

- Calcular los dos vectores de Killing asociados a t y a ϕ y sus cantidades conservadas asociadas, que denotaremos por e y l respectivamente.
- Demostrar que las partículas siguen una órbita ecuatorial y que su ecuación del movimiento es

$$\dot{r}^2 + V(r) = e^2\,,$$

con

$$V(r) = f_1(r)\left(\epsilon + \frac{l^2}{f_2^2(r)}\right)\,,$$

donde $\epsilon = 0$ si las partículas tienen masa nula ($\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda$, donde λ es un parámetro afín) y $\epsilon = 1$ si las partículas son masivas ($\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$).
- Encontrar las condiciones que deben de satisfacer las funciones f_1 y f_2 para que esta métrica admita geodésicas de género luz con la coordenada r constante.
- Escribir las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ para la métrica de Schwarzschild. Usando los resultados del apartado anterior, encontrar el valor de r en la métrica de Schwarzschild para el cual es posible tener geodésicas de género luz con r constante.

10. Encontrar $f(v)$ de tal manera que la métrica

$$\mathrm{d}s^2 = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}z + f(z)\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Determinar que condiciones debería satisfacer $f(z)$ para que el espacio-tiempos sea plano.

11. Considérense dos observadores en reposo en un campo gravitatorio dado por la siguiente métrica (espacio anti-de Sitter):

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$

donde l es un parámetro con dimensiones de longitud. El primer observador se encuentra en $r_1 = a$, $\theta_1 = \pi/2$, $\phi_1 = 0$ y el segundo observador en $r_2 = b$, $\theta_2 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$, con $b \ll a \ll l$. El primer observador emite luz que viaja con $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ que es detectada por el segundo observador. Calcúlese el desplazamiento de la longitud de onda que observa el segundo observador e indíquese si es hacia el rojo o al azul.

12. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\,,$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y el tensor de energía-momento producido por un campo electromagnético. Describe el campo graviatatorio de una estrella cargada con simetría esférica o un agujero negro estático cargado. En unidades adecuadas los parámetros M y Q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella o agujero negro. En lo que sigue supondremos que $M^2 > Q^2$ ¿Por qué?

- Demuéstrese que una partícula masiva sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con lo que sucede en la métrica de Schwarzschild.
- Determínese la coordenada radial, r_{min} de máximo acercamiento para una partícula masiva sin carga que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\text{min}} < r_-$, donde r_- es la menor raiz de la ecuación:
$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0\,.$$

13. Supóngase un agujero negro de tipo Schwarzschild de masa M.
    - Demostrar que la luz puede seguir una órbita circular con coordenada radial $r = 3M$.
    - Discutir cualitativamente la estabilidad de esta órbita.
    - Calcular el periodo de esta órbita en tiempo coordenado.
    - Calcular el periodo que mediría un observador situado en el infinito.
    - Si hay un observador que está situado en un punto *fijo* de la órbita $r = 3M$, ¿qué periodo observaría?
    - Si la masa del agujero negro es la masa del Sol ($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg), expresar en metros el radio $r = 3M$.

14. Alicia y Roberto son dos intrépidos físicos-astronautas que están en reposo (ayudados por cohetes) con coordenadas radiales r_A y r_R respectivamente (las angulares son las mismas para los dos físicos), en la vecindad de Gargantúa-II (un agujero negro de tipo Schwarzschild con masa M).

    Se conoce que $r_A > r_R > 2M$ y sean τ_A y τ_R los tiempos propios de Alicia y Roberto respectivamente.

    Supongamos que Roberto envía repetidamente señales a Alicia con periodo $\Delta\tau_R$. Calcula el periodo con el que Alicia recibe las señales en función de r_A, r_R, $\Delta\tau_R$ y M.

15. La métrica de un agujero negro de Reissner-Nordstrøm con masa M y carga Q es
$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\,,$$
    - Calcula los dos horizontes que presenta este espacio-tiempo. ¿Cuál es el mayor valor del cociente $|Q|/M$ para el cual este horizonte existe? Un agujero negro que satura este límite se denomina *extremal*.
    - Demuestra que la órbita estable circular de menor radio (ISCO) de un agujero extremal de Reissner-Nordstrøm es $r = 4M$.

16. Consideremos una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe como:
$$\mathrm{d}s^2 = -f_1(r)\mathrm{d}t^2 + f_2(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$
    donde
$$\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\,,$$
$$-\infty < t < \infty, \qquad 0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \theta < \pi, \qquad 0 \le \phi < 2\pi\,.$$
    En estas coordenadas el tensor de energía-momento está dado por
$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}\,,$$
    con $u_\mu = (-\sqrt{f_1(r)}, 0, 0, 0)$ y p y ρ escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas.
    - Imponiendo que $T^{\mu\nu}$ es conservado, encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen ρ y p.
    - ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

Nota: Las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ no son las de la solución de Schwarzschild ya que no estamos en el vacío (hay un tensor $T^{\mu\nu}$).

17. Considera un modelo cosmológico homogéneo e isótropo descrito por

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \left(\frac{t}{t_*}\right)^2 \left[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right] ,$$

donde t_* es una constante.

(a) ¿Es un universo abierto, cerrado o plano?
(b) ¿Es un universo dominado por la materia? Justificar la respuesta..
(c) Asumiendo las ecuaciones de Friedmann, calcular $\rho(t)$.

18. Construye los tres espacios maximalmente simétricos en 1+3 dimensiones.

Ayuda: Necesitas construir los espacios de Minkowski, de Sitter y anti-de Sitter.

19. Considera un universo con solo materia.

- Calcula $a(t)$, $t(z)$ y $d_A(z)$ como una función de H_0^{-1} y de t.
- Calcula la edad del universo (hoy) y cuando $z = 1000$. Usa $h = 0.68$.
- Calcula $d_A(z)$ cuando $z = 100$.
- Demuestra que la función $d_A(z)$ presenta un máximo y calcula el valor de z de este máximo.

Nota: $d_A(z) = d_L/(1+z)^2$, donde d_L es la distancia luminosidad.

20. Encuentra una integral, función de H_0 y las Ω's, para calcular la distancia propia al horizonte visible. ¿Cuál sería esta distancia hoy, en años-luz? Usar: $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ and $\Omega_R = 0$.

Ayuda: Evalúa numéricamente la integral.

21. Asumiendo que $K = 0$, demuestra:

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z}\left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right) .$$

22. Considera un universo con $h = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.55$, $\Omega_M = 0.45$ y $\Omega_R = 0$.

- Calcula la edad del universo.
- Calcula su curvatura.
- Calcula $m - M$ y la distancia luminosidad (d_L) de una estrella con $z = 4$? ¿Hace cuánto tiempo se emitió la luz?

23. Demuestra

$$\Omega_k(z) = \frac{\Omega_k}{\Omega_M(1+z) + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + \Omega_k} .$$

24. Demuestra

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \Omega(t)\right) = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}\left(1 - \Omega(t)\right) ,$$

donde

$$\Omega(t) \equiv \Omega_M(t) + \Omega_R(t) + \Omega_\Lambda(t) ,$$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)} , \; i = R, M, \Lambda ,$$

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} .$$

$\dot{a} \equiv \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$.