**PROBLEMAS ADICIONALES DE GRAVITACIÓN y COSMOLOGÍA Curso 2015/2016**

1. Calcular los tensores de Riemann y de Ricci, y la curvatura escalar, de una métrica plana conforme

$$g_{\mu\nu} = \exp[2\phi(x)]\eta_{\mu\nu}$$

   donde $\phi(x)$ es una función arbitraria. ¿Cómo se deforman los conos de luz?

2. Demostrar que:

   - El conmutador de dos vectores de Killing es un vector de Killing.
   - La combinación lineal de dos vectores de Killing también es un vector de Killing.

   Nota. Los vectores de Killing, $\xi$, satisfacen que $\mathcal{L}_\xi \boldsymbol{g} = 0$ lo que se puede escribir como $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$.

3. Una variedad 4-dimensional tiene coordenadas $(t, \boldsymbol{x})$ con una métrica

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(d\boldsymbol{x})^2 \,, \tag{1}$$

   donde $\phi \ll 1$ en todos los puntos.

   Dado un punto arbitrario de coordenadas $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, encontrar una transformación de coordenadas a un RIL, en primer orden en $\phi$. Calcular la aceleración con el que el RIL acelera con respecto a las coordenadas originales (en primer orden en $\phi$).

4. Calcular, en primer orden en $\phi$, el tensor de Riemann de la métrica dada por la Ec. (1).

   Demostrar que la ecuación de la desviación geodésica se escribe (en el orden más bajo en velocidades y en $\phi$) como

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\phi_{,ij}\xi^j \,.$$

   Interpretar esta ecuación desde el punto de vista Newtoniano.

5. Demostrar que la contracción de un vector $\boldsymbol{v}$ con el tensor de proyección $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$, proyecta al vector $\boldsymbol{v}$ en la 3-superficie ortogonal al vector $\boldsymbol{n}$ (vector de género tiempo unitario).

   Si $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario de género espacio, demostrar que $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$ es el correspondiente operador de proyección.

   Demostrar que no se puede definir de manera única un operador de proyección ortogonal a un vector de género luz.

6. Demostrar

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\log g\right)_{,\nu} \,,$$

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu,\nu} = -g^{\alpha\beta}{}_{,\nu}g_{\beta\mu} \,,$$

$$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = -\Gamma^\mu_{\beta\alpha}g^{\beta\nu} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha}g^{\beta\mu} \,,$$

   Nota: $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$.

7. Sea el siguiente espacio-tiempo en 4+1 dimensiones equipado con la métrica

$$ds_5^2 = e^{2A(v)}\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + dv^2$$

   donde $v$ es la cuarta dimensión espacial. Encontrar la ecuación que satisface $A(v)$, si la métrica verifica las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica $(\Lambda)$ y $T_{\alpha\beta} = 0$. Determínese el signo de la constante cosmológica. ¿Qué ocurre si $\Lambda = 0$?

8. Una partícula con masa se mueve en un campo gravitatorio descrito en coordenadas locales $(t, x, y, z)$ por la métrica
$$-ds^2 = e^{2ax}dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$
Conocemos que $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$ en $t = 0$. Calcula $dx^2/d\tau^2$ en $t = 0$.

9. Sabiendo que nuestro universo se expande a un ritmo dado por la constante de Hubble, $H_0$, estimar a que ritmo deberían crearse espontáneamente átomos de hidrógeno para que la densidad actual $\rho_0 \simeq 3 \times 10^{-30}\text{g/cm}^3$. Asumir $H_0 \simeq 70$ km/(s Mpc).

10. Demostrar:
$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z^2}\left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right).$$

11. Demostrar las siguientes ecuaciones para $d_L$ (distancia-luminosidad):

    - Si $\Omega_\Lambda = 1$
    $$d_L = \frac{z + z^2}{H_0}.$$
    - Para un universo completamente vacío ($\Omega_k = 1$):
    $$d_L = \frac{z + z^2/2}{H_0}.$$

12. Supóngase la siguiente ecuación de estado:
$$p = -\rho + \rho^2/\rho_1 \,,$$
donde $\rho_1$ es una constante. Asúmase $k = 0$. Calcular $\rho(a)$, imponiendo $a = a_1$ cuando $\rho = \infty$. Calcular $a(t)$ y $\rho(t)$, tomando $\rho = \infty$ cuando $t = 0$. Calcular la edad del universo y el parámetro de deceleración $q_0$ para una densidad actual $\rho_0$.

13. Consideremos un universo homogéneo e isótropo, con $p = 0$, y constante cosmológica. Demostrar que existe una solución estática para la métrica, pero que es inestable.

14. Demostrar que no existen soluciones a la ecuación de Einstein para el tensor de energía-momento de un fluido ideal que sean homogéneas, isótropas y estáticas.

15. Consideremos la siguiente métrica
$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \,.$$

    - Calcular el potencial efectivo para partículas masivas.
    - Calcular el tensor de energía-momento para obtener una interepretación física del parámetro $\Lambda$.
    - Estimar el efecto del término proporcional a $\Lambda$ en la dinámica celeste de los cuerpos del sistema solar. Por ejemplo asumir, $\Lambda \simeq 10^{-52}\text{m}^{-2}$.