

PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2025/2026

Hoja 4 (Temas 7 y 8)

1. Consideremos un modelo de universo asociado a la siguiente métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\alpha} dx^2 + t^{2\beta} dy^2 + t^{2\gamma} dz^2,$$

donde α , β y γ son constantes.

- Discutir si este modelo es compatible con el Principio Cosmológico Perfecto.
 - Encontrar las relaciones que deben de satisfacer α , β y γ para que el modelo esté vacío de materia.
 - Supongamos que las constantes α , β y γ son diferentes de cero. Mostrar que un universo vacío de este tipo no es compatible con las propiedades de la radiación de fondo observadas experimentalmente.
2. Demostrar que un observador moviéndose con velocidad β ($c = 1$) en una dirección θ relativa al fondo cósmico de microondas (temperatura T) observaría la radiación de un cuerpo negro a una temperatura T' dada por:

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)},$$

donde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. El desarrollo de esta fórmula en primer orden en β proporciona la anisotropía dipolar que ha sido observada: $T(\theta) = T_0 + A \cos \theta$ (con $A = 3.372 \pm 0.0035$ mK y $T_0 = 2.728 \pm 0.0002$ K). Usando este dato, estimar la velocidad del Sol relativa al fondo cósmico de microondas. Comparar este resultado con la velocidad del sistema solar en el grupo local que ha sido estimada en unos 315 km/s.

3. Suponiendo un universo plano, despreciando la radiación y considerando que se ha observado una galaxia con $z = 1.55$ y con una edad de 3.5×10^9 años (en el momento de la emisión de la luz), encontrar una cota inferior a Ω_Λ . Asumir $H_0 = 70$ km/s/Mpc.
4. Supongamos que $\Omega_M = 0.25$ y $\Omega_V = 0.75$ y despreciamos la radiación Ω_R . ¿Para qué valor de z (y también del tiempo) la expansión del universo dejó de desacelerar y empezó la aceleración que observamos actualmente?
5. En Septiembre de 2012, la revista Nature [W. Zheng et al, Nature 489, 406 (2012)], publicó un artículo sobre una galaxia en el *cluster* MACS J1149+2223 que presentaba un *redshift* de $z = 9.6$.

- ¿Cuándo fue emitida la luz de esta galaxia?

Si la citada galaxia se formó 200 millones de años después del *Big Bang*,

- ¿Cuál sería su *redshift* cosmológico en el momento de su formación?
- Calcular la temperatura del CMB en los momentos de formación de la estrella y de la emisión de la luz que recibimos ($z = 9.6$).
- ¿Cuál sería la temperatura de los neutrinos en los dos momentos del apartado anterior?
- ¿Cuál sería su distancia-luminosidad (d_L)? ¿Podrías estimar la diferencia entre las magnitudes relativa y absoluta ($m - M$) de la estrella?

Finalmente,

- ¿Cuál sería la edad del Universo?

Nota. En el material suplementario del citado artículo, los autores usan $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_R = 0$ y $h = 0.7$. Además asumir $T_{\gamma,0} = 2.725$ K.

6. La sección eficaz de captura de un neutrino por un nucleón es aproximadamente $\sigma \simeq 10^{-48}$ m² (mediada a todas las energías del neutrino). Si la densidad en el centro del Sol es $\rho \simeq 10^5$ kg/m³, estimar el recorrido libre medio de un neutrino en el centro del Sol.
7. La sección eficaz electrodébil (que incluye todas las reacciones en las que se producen, destruyen y dispersan neutrinos) es aproximadamente:

$$\sigma \simeq \frac{G_F^2 (k_B T)^2}{\pi (\hbar c)^4}$$

donde G_F es la constante de Fermi de las interacciones débiles: $G_F/(\hbar c)^3 = 1.16637 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$. Estimar a qué temperatura se desacoplarán los neutrinos del resto de las partículas.