

PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2025/2026
Hoja 3 (Temas 4, 5 y 6)

1. Un astronauta orbita siguiendo un órbita circular con coordenada $r = 10M$ alrededor de un agujero negro de tipo Schwarzschild con masa M .

- ¿Cuánto tiempo necesitará el astronauta, medido por su reloj, para completar una órbita?
- Cada vez que completa cada una de sus órbitas, el astronauta envía una señal que recibe un observador situado en una posición muy distante del agujero negro. ¿Qué intervalo de tiempo medirá el reloj del citado observador entre la recepción de dos señales consecutivas enviadas por el astronauta?
- Un tercer reloj está situado en reposo, con la ayuda de cohetes, en una posición muy cercana a $r = 10M$. ¿Cuál será el tiempo que medirá este tercer reloj entre dos pasos consecutivos de la nave espacial del astronauta por su posición?

2. Mostrar que la trayectorias de los rayos de luz en la métrica de Schwarzschild obedecen la ecuación

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2,$$

donde $u \equiv M/r$, siendo r la coordenada Schwarzschild radial. Sea b el valor mínimo de r a lo largo de la trayectoria (es decir, el parámetro de impacto). Suponiendo que $M/b \ll 1$, ¿cuál es la deflexión que sufre un fotón cuando pasa cerca de un objeto gravitatorio esférico? Obténgase una fórmula para el ángulo de deflexión en el orden más bajo en el parámetro M/b .

3. Construir unidades de masa, longitud y tiempo a partir de \hbar , G y c .

4. Consideremos un agujero de tipo Kerr. Se emite un fotón en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en la dirección dada por la variable ϕ . Escribir la ecuación que satisfará $d\phi/dt$. ¿Qué ocurre cuando $g_{tt} = 0$?

5. En un agujero negro de tipo Kerr-Newmann:

- Calcular el área (Σ) del horizonte de sucesos.
- Expresar su masa como función de su carga, momento angular y Σ .

6. Asumiendo conocida la Temperatura de Hawking de un agujero negro de tipo Schwarzschild y masa M , $T_H = 1/(8\pi M)$, demostrar que la entropía es $A/4$ donde A es el área del horizonte de sucesos. Ayuda: Aplicar argumentos generales de Termodinámica.

7. Calcular el tiempo que tardaría en evaporarse un agujero negro de la masa del Sol.