

**PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2025/2026**  
**Hoja 2 (Tema 3)**

1. En un determinado espacio, aparentemente tres dimensional, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos viene dada por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (3dx + 4dy + 12dz)^2/169$ . Probar que en realidad tal espacio es localmente  $\mathbb{R}^2$ . Encontrar dos nuevas coordenadas,  $\eta$  y  $\xi$ , para las cuales el elemento de línea toma la forma  $ds^2 = d\eta^2 + d\xi^2$ .
2. El plano  $\mathbb{R}^2$ , en coordenadas polares, tiene como longitud de arco  $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$ . Calcular en estas coordenadas sus símbolos de Cristoffel  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ .
3. Dada la métrica  $ds^2 = dv^2 - v^2du^2$ , calcular los coeficientes de la conexión afín asociada, el tensor de Riemann, el de Ricci y la curvatura escalar. Calcular también las curvas geodésicas.
4. Sea la ecuación geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

donde  $\lambda$  es un parámetro afín. Probar que cualquier otro parámetro afín (es decir tal que la ecuación geodésica mantiene su estructura tras su cambio al nuevo parámetro) es necesariamente una función lineal de  $\lambda$ .

5. Probar que si una geodésica es de género tiempo en alguno de sus puntos, lo es en todos. (Idem para género luz y espacio).
6. Demostrar que la métrica  $ds^2 = y^2dx^2 + x^2dy^2$  representa una superficie plana, mientras que la métrica  $ds^2 = ydx^2 + xdy^2$  corresponde a una superficie curva.
7. Considérese la métrica de Poincaré  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$  definida en el semiplano superior  $y > 0$ . Determinar las geodésicas. Calcular el escalar de curvatura y compárese con el correspondiente a una 2-esfera.
8. Un vector de Killing,  $\xi$ , satisface la siguiente ecuación:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0.$$

Demostrar que  $u^\alpha \xi_\alpha$  es constante a lo largo de una geodésica, siendo  $u$  el cuadrivector tangente a la geodésica.