

PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2024/2025

Hoja 2 (Tema 3)

1. En un determinado espacio, aparentemente tres dimensional, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos viene dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (3dx + 4dy + 12dz)^2/169$. Probar que en realidad tal espacio es localmente $\mathbb{R}^2$. Encontrar dos nuevas coordenadas, η y ξ , para las cuales el elemento de línea toma la forma $ds^2 = d\eta^2 + d\xi^2$.
2. El plano $\mathbb{R}^2$, en coordenadas polares, tiene como longitud de arco $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Calcular en estas coordenadas sus símbolos de Cristoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.
3. Dada la métrica $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$, calcular los coeficientes de la conexión afín asociada, el tensor de Riemann, el de Ricci y la curvatura escalar. Calcular también las curvas geodésicas.
4. Sea la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

donde λ es un parámetro afín. Probar que cualquier otro parámetro afín (es decir tal que la ecuación geodésica mantiene su estructura tras su cambio al nuevo parámetro) es necesariamente una función lineal de λ .

5. Probar que si una geodésica es de género tiempo en alguno de sus puntos, lo es en todos. (Idem para género luz y espacio).
6. Demostrar que la métrica $ds^2 = y^2 dx^2 + x^2 dy^2$ representa una superficie plana, mientras que la métrica $ds^2 = y dx^2 + x dy^2$ corresponde a una superficie curva.
7. Considérese la métrica de Poincaré $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ definida en el semiplano superior $y > 0$. Determinar las geodésicas. Calcular el escalar de curvatura y compárese con el correspondiente a una 2-esfera.
8. Un vector de Killing, ξ , satisface la siguiente ecuación:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0.$$

Demostrar que $u^\alpha \xi_\alpha$ es constante a lo largo de una geodésica, siendo u el cuadrivector tangente a la geodésica.