PROBLEMAS DE GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA. Curso 2023/2024
Hoja 2 (Tema 3)

1. En un determinado espacio, aparentemente tres dimensional, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos viene dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (3dx + 4dy + 12dz)^2/169$. Probar que en realidad tal espacio es localmente $\mathbb{R}^2$. Encontrar dos nuevas coordenadas, η y ξ, para las cuales el elemento de línea toma la forma $ds^2 = d\eta^2 + d\xi^2$.

2. El plano $\mathbb{R}^2$, en coordenadas polares, tiene como longitud de arco $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Calcular en estas coordenadas sus símbolos de Cristoffel $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$.

3. Dada la métrica $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$, calcular los coeficientes de la conexión afín asociada, el tensor de Riemann, el de Ricci y la curvatura escalar. Calcular también las curvas geodésicas.

4. Sea la ecuación geodésica
$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$
donde λ es un parámetro afín. Probar que cualquier otro parámetro afín (es decir tal que la ecuación geodésica mantiene su estructura tras su cambio al nuevo parámetro) es necesariamente una función lineal de λ.

5. Probar que si una geodésica es de genero tiempo en alguno de sus puntos, lo es en todos. (Idem para género luz y espacio).

6. Demostrar que la métrica $ds^2 = y^2dx^2 + x^2dy^2$ representa una superficie plana, mientras que la métrica $ds^2 = ydx^2 + xdy^2$ corresponde a una superficie curva.

7. Considérese la métrica de Poincaré $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ definida en el semiplano superior $y > 0$. Determinar las geodésicas. Calcular el escalar de curvatura y compárese con el correspodiente a una 2-esfera.

8. Un vector de Killing, ξ, satisface la siguiente ecuación:
$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0\,.$$
Demostrar que $u^\alpha \xi_\alpha$ es constante a lo largo de una geodésica, siendo u el cuadrivector tangente a la geodésica.