

GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.

Examen Convocatoria de Mayo [13/5/2026]

1. Describe brevemente y asigna tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde que la temperatura fue de $T = 10^{12}$ K hasta hoy.

(2 puntos)

2. Demuestra que en un universo plano se verifica

$$\frac{dT}{dt} = -\sqrt{24\pi G_N \rho(T)} \frac{s(T)}{s'(T)}$$

donde t es el tiempo, T es la temperatura, ρ es la densidad de energía, s es la entropía por unidad de volumen y $s'(T) = ds/dT$.

(1.5 puntos)

3. Calcula el tiempo necesario para que el universo se enfrie desde las siguientes condiciones:

- De $T = 3 \times 10^{11}$ K a $T = 2 \times 10^{11}$ K. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?
- De $z = 20$ a $z = 2$. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?

(1.25 puntos)

4. Considera la siguiente métrica bidimensional:

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{(1 - r^2)^2}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel.
- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.
- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}\}$ en función de la base coordenada $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{rr} , $R^{r\phi}$, $R_{\hat{r}\hat{\phi}}$, $R_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ y $R_{\hat{r}\hat{r}}$.
- ¿Cuál es el escalar de curvatura de este espacio? Discute el resultado.
- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.

(2 puntos)

5. Demuestra las siguientes propiedades.

- El módulo de un vector no cambia cuando se le transporta paralelamente a lo largo de una curva.
- El ángulo entre dos vectores no cambia cuando ambos vectores se transportan paralelamente a lo largo de la misma curva.

(1.25 puntos)

6. La métrica de un agujero negro de Reissner-Nordstrøm con masa M y carga Q es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

En lo que sigue consideraremos un agujero negro subextremal ($M^2 > Q^2$).

- Calcula los dos horizontes que presenta este espacio-tiempo, que denotaremos r_+ y r_- , con $r_+ > r_-$.
- Demuestra que la gravedad superficial, κ , en el horizonte externo ($r = r_+$) está dada por

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2}.$$

(2 puntos)

Algunos datos.

- $h = 0.674$, $T_{\gamma,0} = 2.7255$ K, $\Omega_M = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$ y $\Omega_R \simeq 0$.

$$\int_0^y \frac{1}{x\sqrt{\Omega_M x^{-3} + \Omega_\Lambda}} dx = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} y^{3/2} \right).$$

- Para la métrica del problema 4: $R^r_{\phi\phi r} = 4r^2/(1-r^2)^2$.
- Los símbolos de Christoffel no nulos para una métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

son

$$-\Gamma^r_{rr} = \Gamma^t_{tr} = \frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rf(r), \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}f(r)f'(r),$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -rf(r)\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$