

GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.

Examen Convocatoria de Mayo [30/5/2025]

1. Describe brevemente y asigna tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde $z = 3000$ hasta hoy.
(2 puntos)

2. Considera un universo dominado por la materia. Si en el momento de la recombinación del hidrógeno, el parámetro de deceleración fue $q = 0.5001$, calcula su valor hoy. ¿Cuál sería el valor del parámetro K ?

Repetir el cálculo para $q = 0.49$.

(2 puntos)

3. Calcula el tiempo necesario para que el universo se enfrie desde las siguientes condiciones:

- De $T = 5.06 \times 10^{14}$ K a $T = 4.22 \times 10^{14}$ K. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?
- De $T = 100$ K a $T = 10$ K. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?

Nota: Justifica todos los cálculos y en caso necesario añadir a la discusión la función del notebook (Sage) de Cosmología con los correspondientes argumentos y su resultado numéricos con las unidades adecuadas. (1 punto)

4. Considera el siguiente espacio-tiempo bidimensional:

$$ds^2 = x^2 dx^2 + x dy^2.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel.
- Escribe una ecuación diferencial para la geodésica parametrizada con $y(x)$.
Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.
- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$.
- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{e_{\hat{x}}, e_{\hat{y}}\}$ en función de la base coordenada $\{e_x, e_y\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{xx} , R^{yx} , $R_{\hat{x}\hat{y}}$, $R_{\hat{x}\hat{x}}$ y $R_{\hat{y}\hat{y}}$.
- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.

(2.5 puntos)

5. La astronauta Amelia Brand lanza un objeto hacia arriba desde el planeta Miller perpendicularmente a su superficie (radialmente). Supondremos que el planeta Miller no presenta rotación, es esencialmente esférico y que su gravedad exterior puede ser representada por la métrica de Schwarzschild con coordenadas (t, r, θ, ϕ) . La masa del planeta Miller es M y su radio R . Amelia lanza el objeto con una velocidad inicial medida con su tiempo propio de $v_0 = dr/d\tau$.

- Calcula el valor máximo de la coordenada radial que alcanza el objeto. Compara con el resultado Newtoniano.
- Calcula el tiempo propio y el tiempo coordenado del objeto, en términos de integrales sobre la coordenada r , cuando alcanza el valor máximo de la altura sobre el planeta.
- ¿Podrías dar alguna interpretación física al tiempo coordenado?

(2.5 puntos)

Algunos datos.

$$h = 0.674, T_{\gamma,0} = 2.7255 \text{ K}, \Omega_M = 0.315, \Omega_\Lambda = 0.685 \text{ y } \Omega_R \simeq 0.$$